УДК 517.9
DOI https://doi.org/10.32782/2521-6643-2026-2-72.2

Пославський С. Ю., кандидат фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник Інституту транспортних систем
та технологій Національної академії наук України
ORCID: 0009-0007-8972-5823

Редчиць Д. О., доктор фізико-математичних наук, професор,
директор Інституту транспортних систем та технологій
Національної академії наук України
ORCID: 0000-0001-8538-6026

Акіменко О. В., провідний інженер Інституту транспортних систем
та технологій Національної академії наук України
ORCID: 0000-0002-4562-4795

Моісеєнко С. В., кандидат технічних наук, доцент,
завідувачка кафедри інформатики і комп'ютерних наук
Херсонського національного технічного університету
ORCID: 0000-0001-5802-3887

ДВОСТОРОННІ ОЦІНКИ МАКСИМАЛЬНОГО ПОКАЗНИКА ЛЯПУНОВА

У більшості робіт розглядаються системи з постійним запізненням, проте, найчастіше, інформація про функцію запізнення відсутня, відома лише її верхня межа, крім того, система може містити розподілене запізнення. Стійкість систем зі змінним і розподіленим запізненням вивчена значно меншою мірою.

Відомі методи, в більшості випадків, дозволяють отримувати лише достатні умови стійкості або верхні оцінки максимального показника Ляпунова. Недоліком таких результатів є те, що ступінь їхньої консервативності залишається невідомим. У зв'язку з цим є актуальним завдання локалізації максимального показника Ляунова, тобто, крім верхньої оцінки, необхідно знайти його нижню оцінку.

У статті детально розглянуто клас систем нелінійних диференціальних рівнянь із заданою лінійною частиною та обмеженим за нормою нелінійним доданком, що містить змінне запізнення. Особливу увагу приділено впливу запізнення на динаміку системи та оцінюванню її стійкісних характеристик. Отримано двосторонні оцінки максимального показника Ляпунова, які виражено через норму нелінійного члена, а також через максимальні значення функцій запізнення. Це дозволяє встановити кількісні межі поведінки розв'язків і оцінити швидкість їх збіжності або розбіжності.

Для окремих класів систем вдалося визначити точні значення максимального показника Ляпунова, що є важливим результатом для теорії стійкості. На основі отриманих оцінок сформульовано достатні, а в певних випадках і необхідні умови експоненційної стійкості досліджуваних систем. Характерною особливістю цих умов є їх інваріантність відносно запізнення, що значно розширює сферу їх застосування.

Запропоновано також простий і ефективний метод перевірки експоненційної стійкості, який не потребує складних обчислень і має обчислювальну трудомісткість, що практично не залежить від розмірності (порядку) системи. Це робить підхід зручним для практичного використання, зокрема для систем високої розмірності. На завершення наведено низку прикладів, які ілюструють застосування розробленої методики, демонструють її ефективність та підтверджують теоретичні результати.

Ключові слова: *нелінійні диференціальні рівняння, змінне запізнення, показник Ляпунова, експоненційна стійкість, оцінки стійкості систем*

Poslavskyi S. Yu., Redchyts D. O., Akimenko O. V., Moiseienko S. V. Bilateral estimates of the maximum Lyapunov indicator

Many systems encountered in problems of mechanics, control theory, and other fields of science and engineering are described by nonlinear differential equations with time delay. Most studies consider systems with constant delay; however, information about the delay function is often unavailable, with only its upper bound known; furthermore, the system may contain distributed delay.

Known methods, in most cases, allow one to obtain only sufficient conditions for stability or upper bounds on the maximum Lyapunov exponent. A drawback of such results is that the degree of their conservativeness remains unknown. In this regard, *the task of localizing the maximum Lyapunov exponent is relevant; that is, in addition to an upper bound, it is necessary to find its lower bound. The proximity of these bounds guarantees the accuracy of the obtained upper bound and, consequently, of the sufficient stability conditions.*

The article provides a detailed examination of a class of systems of nonlinear differential equations with a given linear part and a norm-bounded nonlinear term containing a variable delay. Particular attention is paid to the effect of the delay on the system's dynamics and the estimation of its stability characteristics. Was obtained two-sided estimates of the maximum Lyapunov exponent, expressed in terms of the norm of the nonlinear term as well as in terms of the maximum values of the delay functions. This allows us to establish quantitative bounds on the behavior of the solutions and to estimate the rate of their convergence or divergence.

For certain classes of systems, it was possible to determine exact values of the maximum Lyapunov exponent, which is an important result for stability theory. Based on the obtained estimates, sufficient, and in certain cases necessary, conditions for the exponential stability of the studied systems have been formulated. A characteristic feature of these conditions is their invariance with respect to delay, which significantly expands their scope of application.

A simple and effective method for verifying exponential stability is also proposed, which does not require complex calculations and has a computational complexity that is practically independent of the system's dimension (order). This makes the approach convenient for practical use, particularly for high-dimensional systems. Finally, a series of examples is provided that illustrate the application of the developed method, demonstrate its effectiveness, and confirm the theoretical results.

Key words: *nonlinear differential equations, variable delay, Lyapunov exponent, exponential stability, stability estimates of systems*

Постановка проблеми. Велика кількість систем, що зустрічаються в задачах механіки, теорії автоматичного регулювання та інших галузях науки і техніки описуються нелінійними диференціальними рівняннями із запізненням. Аналіз стійкості є необхідною частиною дослідження таких систем. Більшість сучасних досліджень стійкості таких систем присвячено висновку критеріїв стійкості за допомогою функцій та функціоналів Ляпунова. Оцінкам максимального показника Ляпунова, що характеризує його швидкість зменшення рішень, присвячено значно меншу кількість досліджень.

Розглядається система диференціальних рівнянь

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(x(t-\tau(t),t), \tag{1}$$

де $A(t)$ – задана матриця, $x \in R^n$.

Функції $\tau(t)$, $x_0(t)$ і $f(x, t)$ уривчасто-неперервні та задовольняють умовам

$$\begin{gathered} \tau(t) \in [0, h],\ x(t) = x_0(t) \text{ при } t \in [-h, 0], \\ \|x_0(t)\| \le M, \\ \|f(x, t)\| \le k\|x\|, \quad f(0, t) = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

де $\|\cdot\|$ – будь-яка норма вектора та узгоджена норма матриці.

Функції $x_0(t)$ і $\tau(t)$ назвемо $f(x, t)$ допустимими, якщо вони задовольняють наведеним вище умовам.

Нехай λ' – показник Ляпунова розв'язання $x(t)$ рівняння (1) за деяких допустимих $x_0(t)$, $f(x, t)$, і $\tau(t)$, тобто.

$$\lambda'(x_0, f, \tau_B, \tau) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln\|x(t)\|}{t}.$$

Максимальний показник Ляпунова рішень $x(t)$ системи (1) дорівнює

$$\overline{\lambda} = \sup\lambda(\tau, f, x_0),$$

де супремум обчислюється за всіма допустимими функціями $\tau(t)$, $x_0(t)$ і $f(x, t)$.

Визначення 1. Система (1) експоненційно стійка, якщо $\overline{\lambda} < 0.$ Тоді за будь-яких $x_0(t)$, $f(x, t)$, $\tau_B(t)$ і $\tau(t)$, що задовольняють умовам (2), для відповідних рішень справедлива нерівність

$$x(t) \le Nx_0(t)\exp(\overline{\lambda}t),\ t \in (0, +\infty),$$

де $N > 0$ – деяка стала.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Як відомо, запізнення може істотно впливати на якісну поведінку розв'язків системи, наприклад, мати дестабілізуючий ефект або призводити до появи коливань, зокрема, для систем нейтрального типу, нестійкість може бути викликана навіть скільки завгодно малим запізненням [6]. У той же час, запізнення може надавати і стабілізуючий ефект, наприклад, розв'язок рівняння $\ddot{y}(t) + y(t) - y(t-h) = 0$ є нестійким при $h = 0$, але при $h = 1$ стає асимптотично стійким [5]. Інші лінійні та нелінійні приклади такого роду можна знайти в [7], [8].

В даний час найбільш вивченими є стаціонарні лінійні диференціальні рівняння з постійним запізненням. Питання стійкості розв'язків таких рівнянь може бути вирішено з урахуванням аналізу коренів відповідного характеристичного рівняння. Однак, для систем навіть з одним запізненням, характеристичне рівняння є трансцендентним, що призводить до нескінченної кількості комплексних коренів.

Реальні системи можуть моделюватись рівняннями більш складної структури, наприклад рівняннями, що містять кілька дискретних запізнювань, розподілене запізнення, випадкове запізнення або їх комбінацію. Дослідження нулів характеристичного рівняння найбільш загальних систем є досить складне завдання. Це спричинило розвиток великої кількості різних підходів для дослідження стійкості таких систем. Виклад цих підходів можна знайти, наприклад, в оглядах [5], [9], [10] та монографіях [11], [3], [4].

При дослідженні стійкості диференціальних рівнянь із запізненням одним із найбільш використовуваних є другий метод Ляпунова, при цьому є два напрямки.

У першому напрямі, запропонованому Б. С. Разуміхіним [12], [13], застосовуються функції Ляпунова з додатковою умовою, що обмежує безліч кривих, у яких оцінюється похідна функції Ляпунова, тобто. передісторія перебуває не в довільній точці фазового простору, а всередині області, обмеженою поверхнею рівня, де обчислюється похідна. Аналітично ця умова має вигляд

$$V(s, x(s)) \le V(t, x(t)) \text{ при } t - h \le s \le t.$$

Ця умова отримала назву «умова Розуміхіна».

Другий напрямок засновано Н. М. Красовським, який запропонував розглядати відрізок розв'язку як точку в функціональному просторі. При цьому замість функцій Ляпунова вводяться функціонали Ляпунова-Красовського, які мають відповідні властивості.

У [5] наведено безліч прикладів функціоналів Ляпунова-Красовського для отримання умов стійкості (залежні і не залежні від величини запізнення) для різних систем, що містять постійне, змінне та розподілене запізнення. Проте, як було зазначено там, ці умови можуть давати дуже консервативні результати.

Слід зазначити, що при практичному дослідженні систем із запізненням обидва підходи, найчастіше, дають лише достатні умови стійкості [4].

Мета статті. Розробка нових критеріїв стійкості систем із запізненням, виражених безпосередньо за допомогою параметрів системи, що ґрунтуються на оцінках максимального показника Ляпунова, та отримання верхньої оцінки максимального показника Ляпунова та достатніх умов стійкості.

Викладення основного матеріалу. Верхня оцінка максимального показника Ляпунова

Подаємо рішення (1) у вигляді

$$x(t) = W(t,0)x(0) + \int_0^t W(t,s) f(x(s - \tau(s)), s) ds, \tag{3}$$

де $W(t, s)$ – матриця рівняння $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. Нехай α – його найбільший показник Ляпунова, тоді за деякого $M > 0$ і будь-яких $0 \le s \le t < \infty$

$$\|W(t, s)\| \le M \exp(\alpha(t - s)). \tag{4}$$

Зрозуміло, що верхню межу величини $\overline{\lambda}$ слід шукати в інтервалі

$$\lambda > \alpha. \tag{5}$$

Припустимо:

$$v(t, \lambda, \tau) = \int_0^t \exp[-\lambda(t - s + \tau(s))] W(t,) ds.$$

В силу (4) та (5) функції $v(t, \lambda)$ обмежені на $[0, \infty)$; покладемо:

$$v(\lambda, \tau) = \sup_t v(t, \lambda, \tau), \text{ за } t \ge 0. \tag{6}$$

Зауважимо, що якщо матриця A стала, то

$$W(t, s) = W(t - s),$$

$$v(t, \lambda, \tau) = \int_0^t \exp\left[-\lambda(t - s) + \tau(s)\right] \|W(t - s)\| ds = \int_0^t \exp\left[-\lambda(s + \tau(s))\right] \|W(s)\| ds. \tag{7}$$

Очевидно, що тут $v(t, \lambda, \tau)$ монотонно зростає по t.

$$v(\lambda, \tau) = \lim v(t, \lambda, \tau), \text{ за } t \to \infty.$$

Позначимо $\lambda_+ = \lambda_+(k)$ – найбільший по $\tau(t)$ корінь рівняння

$$kv(\lambda, \tau) = 1. \tag{8}$$

Відповідні значення величини τ визначаються з таких міркувань. Як видно з (7), $v(t, \lambda, \tau)$ спадають по λ. Тому $\lambda_+ < 0$ і $\lambda_+ > 0$ за $kv(0) < 1$ і $kv(0) > 1$ відповідно. З іншого боку, у разі зростання $\tau(t)$ функція $v(t, \lambda, \tau)$ зменшується при $\lambda > 0$ і зростають при $\lambda < 0$. Тому при обчисленні $v(\lambda, \tau)$ (8) слід покласти $\tau = h$, у випадку $kv(0) < 1$ і $\tau = 0$, у випадку $kv(0) > 1$ (при $kv(0) = 1$ ліва частина (8) не залежить від $\tau(t)$).

Наступна теорема дає верхню межу показника $\bar{\lambda}$.

Теорема 1. У системі (1), (2) $\bar{\lambda} \le \lambda_+$.

Доведення. Нехай $x(t)$ – розв'язок (1) за деяких $x_0(t)$, $\tau(t)$, $\tau_B(t)$ і $f(x, t)$. Поклавши в (3) $x(t) = y(t)\exp(\lambda t)$, отримаємо

$$y(t) = \exp(-\lambda t)W(t,0)x(0) + \exp(-\lambda t)\int_0^t W(t,s) f(\exp[\lambda(s-\tau(s))]y(s-\tau(s)), s)ds.$$

Використовуючи умови (1) та (2), знайдемо

$$\|y(t)\| \le \exp(-\lambda t)\|W(t,0)x(0)\| + k\int_0^t \exp(-\lambda(t - s + \tau(s)))\|W(t,s)\|\,\|y(s-\tau(s))\|ds \tag{9}$$

Нехай

$$\|y(t_*)\| = \max\|y(t)\| \text{ при } t \in [0, t_+], \tag{10}$$

де $t_* = t_*(t_+)$. Поклавши в (9) $t = t_*$ та враховуючи (10) та (6), отримаємо

$$\|y(t_*)\| \le \exp(-\lambda t_*)\|W(t_*, 0)x(0)\| + \|y(t_*)\|[kv(\lambda, \tau) + v_1(\lambda, \tau_B)]. \tag{11}$$

Покажемо, що при $\lambda \ge \lambda_+$ функція $\tau(t)$ обмежена на $(0, \infty)$. Дійсно, в іншому випадку $t_* \to \infty$ при $t_+ \to \infty$ та в силу (4) і (5)

$$\exp(-\lambda t_*)\|W(t, 0)x(0)\| \to 0.$$

Оскільки $v(t, \lambda, \tau)$ і $v_1(t, \lambda, \tau_B)$ спадають за λ, то $kv(\lambda, \tau) + v_1(\lambda, \tau_B) < 1$ при $\lambda > \lambda_+$ і будь-яких допустимих $\tau(t)$, $\tau_B(t)$. Але при цьому нерівність (11) не виконується для достатньо великих t_*. Отримане протиріччя доводить, що $\|y(t)\| = \|x(t)\|\exp(-\lambda t) < \infty$ при $\lambda > \lambda_+$ і $t > 0$; отже, $\bar{\lambda} \le \lambda_+$. Теорему доведено.

Наступна теорема дає достатню умову експоненційної стійкості системи (1), (2), інваріантну щодо запізнення $\tau(t)$.

Теорема 2. За умови

$$k < k_* = \frac{1}{v(0)} \tag{12}$$

система (1), (2) експоненційно стійка.

Доведення. Як зазначено вище, необхідною і достатньою умовою експоненційної стійкості є нерівність $\bar{\lambda} < 0$. Як випливає з (2.12), при $k = k_*$ корінь рівняння (8) $\lambda_+ = 0$ за будь-яких $\tau(t)$ і $\tau_B(t)$. Так як $v(\lambda)$ і $v_1(\lambda)$ спадають по λ, то $\lambda_+ < 0$ при $k < k_*$ і, отже, $\bar{\lambda} < 0$. Теорему доведено.

Зауважимо, що на відміну від верхньої оцінки максимального показника Ляпунова умови стійкості (12) не залежать від величини запізнення.

Отримана умова стійкості покращує зазначений раніше критерій Крейна (4) у кількох аспектах.

Насамперед для будь-якої системи вона є більш точною, так як $v(0) \le N/\alpha$, отже $1/v(0) \ge \alpha/N$. Крім того, умова (12) не вимагає обчислення констант N і α, що у разі змінної матриці $A(t)$ є досить важким завданням. Важливо також відзначити, що запропонована умова залишається справедливою і за наявності будь-якого змінного запізнення в нелінійній частині системи.

Нижня оцінка максимального показника Ляпунова

Відомі методи здебільшого дозволяють отримувати лише достатні умови стійкості чи верхню оцінку максимального показника Ляпунова. Недоліком таких результатів є те, що ступінь їхньої консервативності залишається невідомим. У зв'язку з цим цікавить отримання достатніх умов нестійкості та нижньої оцінки максимального показника Ляпунова у просторі параметрів системи. Наявність двосторонніх оцінок дозволить локалізувати точне значення максимального показника Ляпунова.

Нехай для деякої системи $\dot{x} = f(x)$ отримано достатні умови стійкості $F_+(\alpha) \le 0$ та нестійкості $F_-(\alpha) \ge 0$, де α – деякі параметри системи. Нехай α_+ і α_- – корені рівнянь $F_+(\alpha) = 0$ і $F_-(\alpha) = 0$ відповідно. Очевидно, що точне критичне значення параметрів α, що гарантують стійкість системи, лежить в інтервалі (α_+, α_-). За близькістю значень a_+ і a_- можна судити про ступінь консервативності отриманих достатніх умов стійкості.

Знайдемо нижню оцінку максимального показника Ляпунова на випадок, коли лінійна частина системи (1) стаціонарна. Ідея запропонованого методу полягає у наступному. У допустимій області простору властивостей знаходиться точний розв'язок системи. Зокрема, для цієї мети нелінійна функція замінюється лінійною, що лежить у допустимій області.

Розглянемо рівняння

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + kD(\phi)x(t-\tau), \tag{13}$$

де $\tau \in [0, h]$, $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_k)$, $\|D(\phi)\| = 1$. З огляду на останню рівність функція $f(x) = kD(\phi)x$ задовольняє умові (2), тому рівняння (13) належить до розглянутого вище класу.

Отже $\overline{\lambda}_1 \le \overline{\lambda}$, де $\overline{\lambda}_1$ і $\overline{\lambda}$ – максимальні показники Ляпунова систем (13) та (1) відповідно.

Представивши розв'язок (13) у вигляді $x(t) = \exp(\lambda t)y$, отримаємо рівняння щодо λ:

$$\det[A + k\exp(-\lambda\tau)D(\phi) - \lambda I] = 0, \tag{14}$$

де I – одинична матриця.

Для такого розв'язку показник Ляпунова визначається у явному вигляді. Зрозуміло, що показник Ляпунова зазначеного розв'язку може бути нижньою оцінкою максимального показника Ляпунова вихідної системи.

Нехай $\beta = \max_p(\mathrm{Re}(\lambda_p))$, $p = 1, \ldots, n$, де λ_p – корені рівняння (14), тоді $\overline{\lambda}_1 = \beta$. Тому нижню оцінку $\lambda\_$ величини $\overline{\lambda}$ можна визначати за формулою

$$\lambda_- = \sup_{\tau,\phi}\left[\beta(\tau,\phi)\right]. \tag{15}$$

Зауважимо, що у разі евклідової норми в якості $D(\phi)$ можна прийняти будь-яку ортогональну матрицю (як відомо, для такої матриці $\|D(\phi)\| = 1$).

Приклади застосування оцінок

Проілюструємо застосування одержаних оцінок на прикладах.

Приклад 1. Розглянемо рівняння

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = f\left(x\left(t - \tau(t)\right), t\right),$$

$$x \in R^2, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

де $\|f(x, t)\| \le k\|x\|$ і $\tau(t) \in [0, h]$.

Оскільки матриця A стала, то $W(t, s) = W(t - s)$. Легко перевірити, що

$$W(t) = \begin{bmatrix} 2b(t) - a(t) & 2b(t) - 2a(t) \\ -b(t) + a(t) & -b(t) + 2a(t) \end{bmatrix},$$

де $a(t) = \exp(-t)$, $b(t) = \exp(-2t)$.

Рівняння (8) для визначення верхньої межі λ_+ показника $\overline{\lambda}$ набуває вигляду

$$kv(\lambda, \tau) = 1,$$

$$v(\lambda,\tau) = \int_0^\infty \exp\left(-\lambda\left(s + \tau(s)\right)\right)\left\|W(s)\right\|ds,$$

де $\tau = h$ за $kv(0) < 1$ і $\tau = 0$ при $kv(0) \ge 1$.

Нижня межа $\lambda\_$ визначалася з допомогою співвідношень (14), (15), де матриця D приймалася як

$$D = \begin{pmatrix} \cos\phi_1 & \sin\phi_1 \\ -\sin\phi_1 & \cos\phi_1 \end{pmatrix}.$$

На рисунку 1 представлено графіки $\lambda_+(k)$ – суцільною лінією та $\lambda\_(k)$ – пунктирною лінією за різних значень параметра h (у розрахунках використовувалася евклідова норма).

Функції $\lambda_+(k, h)$ зростають по h та k але $\lim k(\lambda, h) = k_* = 0.5184$ при $\lambda \to 0$ не залежить від h. Тому умова $k < 0.5184$ гарантує експоненційну стійкість системи за будь-яких кінцевих h (цей висновок узгоджується з отриманим вище загальним результатом). Зауважимо, що знайдена умова стійкості суттєво покращує відомі умови $k \le 0.1458$, $k \le 0.178$ [14], $k \le 0.2389$ [15], $k \le 0.3333$ [16], встановлені іншими методами. Найкраще з цих критичних значень $k \le 0.3333$.

Таким чином, знайдене значення $k_* = 0.5184$ значно покращують відомі оцінки стійкості і воно не може бути суттєво покращено.

Як видно з рисунка 1, функції $\lambda_+(k, h)$ і $\lambda\_(k, h)$ дуже близькі одна до одної в досить широкій області параметрів k і h, що свідчить про високу точність запропонованого методу щодо даної задачі. Цікаво, що при збільшенні максимального запізнювання h точність зростає.

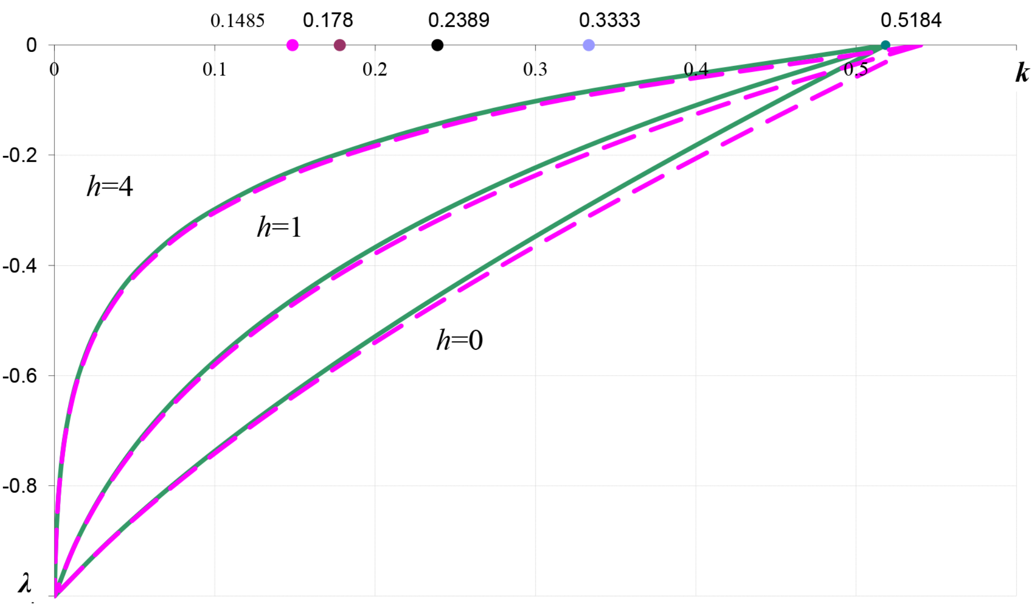

Рис. 1. Межі $\lambda_+(k)$ та $\lambda_-(k)$ показники $\overline{\lambda}$ при різних значення параметра h

Приклад 2. Розглянемо рівняння третього порядку

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = f(x(t-\tau(t), t),$$

$$x \in R^3, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

На рисунку 2 представлено графіки $\lambda_+(k)$ – суцільною лінією та $\lambda_-(k)$ – пунктирною лінією за різних значень параметра h. Функції $\lambda_+(k)$ і $\lambda_-(k)$ обчислювалися тут аналогічно до попереднього прикладу. В якості $D(\phi)$ (14) приймалася ортогональна матриця

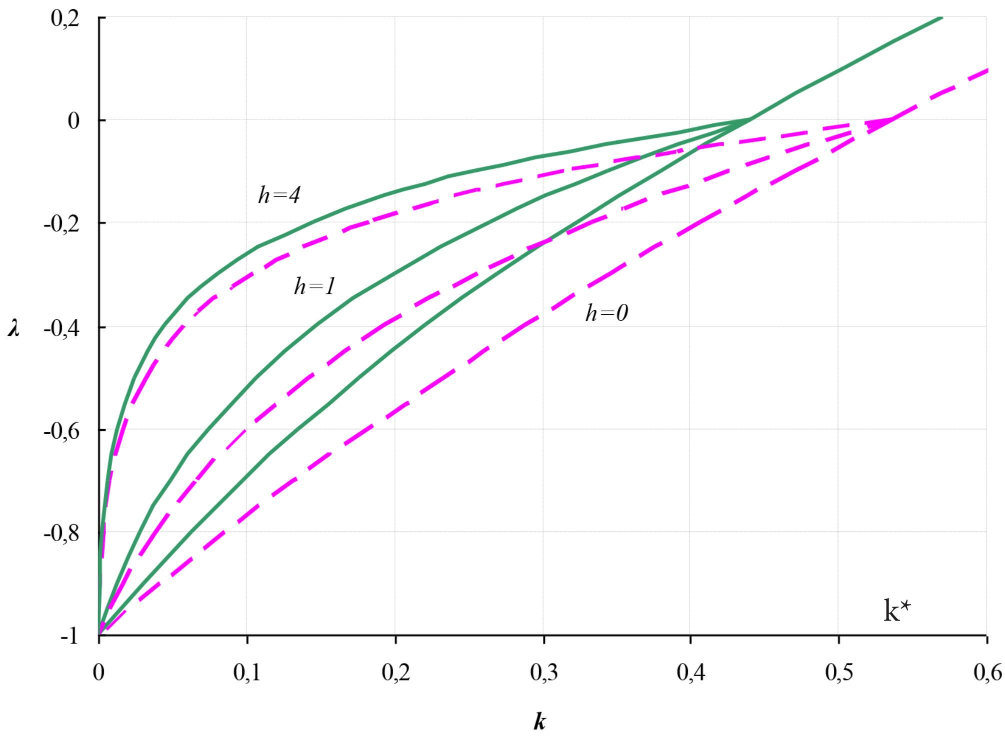

Рис. 2. Межі $\lambda_+(k, h)$ та $\lambda_-(k, h)$ показника $\overline{\lambda}$ при різних значеннях параметра h

$$\begin{pmatrix} \cos\phi_1\cos\phi_2 & \sin\phi_2 & -\sin\phi_1\cos\phi_2 \\ \sin\phi_1\sin\phi_3 - \cos\phi_1\sin\phi_2\cos\phi_3 & \cos\phi_2\cos\phi_3 & \cos\phi_1\sin\phi_3 + \sin\phi_1\sin\phi_2\cos\phi_3 \\ \cos\phi_1\sin\phi_3 + \cos\phi_1\sin\phi_2\sin\phi_3 & -\cos\phi_2\sin\phi_3 & \cos\phi_1\cos\phi_3 - \sin\phi_1\sin\phi_2\sin\phi_3 \end{pmatrix}$$

так що максимізація $\lambda\_(k)$ здійснювалася за параметрами (кутами Ейлера) ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3.

Як і в попередньому прикладі, виявилося, що зі збільшенням максимальної величини запізнення h точність зростає.

Метод розрахунку стійкості систем із стаціонарною лінійною частиною

У всіх відомих методах обчислювальна складність дослідження стійкості суттєво зростає із збільшенням порядку системи. У даному підрозділі систем зі стаціонарною лінійною частиною запропоновано простий метод розрахунку стійкості, трудомісткість якого практично не залежить від порядку системи.

Розглядається система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f\Big(x\big(t-\tau(t)\big), t\Big), \tag{16}$$

де матриця A – гурвіцева, тобто всі її власні значення β_i задовольняють нерівності $\mathrm{Re}\,\beta_i < 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Функції $\tau(t)$, $f(x, t)$ і $x_0(t)$ частково-безперервні та задовольняють умовам (2); при цьому вважаємо, що у (2) використовується евклідова норма.

В силу $f(0, t) = 0$ система (16) має положення рівноваги. Далі розглядається стійкість цього положення.

Вважатимемо, що матриця A має різні власні значення $\beta_1, \ldots, \beta_n$ (цього можна досягти довільно малим збуренням A [104]). Нехай $v_1, \ldots, v_n$ відповідні власні вектори, нормовані умовою $(v_i, v_i) = 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Позначимо T матрицю, стовпцями якої є вектори v_i:

$$T = (v_1, \ldots, v_n).$$

Як відомо,

$$T^{-1}AT = J = diag(\beta_1, \ldots, \beta_n).$$

Поклавши в системі (16) $x = Ty$, отримаємо

$$\dot{y}(t) = Jy(t) + T^{-1}f\Big(Ty\big(t-\tau(t)\big), t\Big). \tag{17}$$

Наступна теорема дає умову експоненційної стійкості системи (16).

Теорема 3. За умови

$$\frac{1}{\beta}\|T^{-1}\|k\|T\| < 1 \tag{18}$$

система (16) експоненційно стійка, причому $\overline{\lambda} < \lambda$,
де $\beta = \min|\mathrm{Re}\,\beta_i|$, λ – корінь рівняння

$$V(\lambda) = \frac{1}{\beta+\lambda}\exp[-\lambda h]\|T^{-1}\|k\|T\|. \tag{19}$$

Доведення. Подамо розв'язання (17) у вигляді

$$y(t) = W(t,0)y(0) + \int_0^t T^{-1}f(Ty(s-\tau(s)), s)ds, \tag{20}$$

де $W(t, s)$ – матриця рівняння $\dot{y}(t) = Jy(t)$.

Покажемо спочатку, що за умови (18) $y(t)$ обмежено на $(0, +\infty)$. В іншому випадку знайдеться послідовність t_q ($t_q \to +\infty$ при $q \to +\infty$), така, що

$$\|y(t_q)\| \geq \|y(t)\|, \quad \text{де } t \leq t_q. \tag{21}$$

З (20), з урахуванням (2) та (21), маємо

$$\|y(t_q)\| \leq \|W(t_q,0)y(0)\| + \int_0^{t_q}\|T^{-1}\|k\|T\|\|y(t_q)\|ds. \tag{22}$$

У цьому випадку $W(t, s) = \exp[(t-s)J]$, тому власні значення матриці $W(t, s)$ рівні $\exp[(t-s)\beta_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Матриця J– діагональна, отже, $W(t, s)$ також діагональна, тому $\|W(t, s)\| = \exp[-\beta(t-s)]$. Тоді

$$\lim_{t_q\to+\infty}\int_0^{t_q}\|W(t_q,s)\|ds = \lim_{t_q\to+\infty}\frac{1}{\beta}\Big(1-\exp\big[-\beta t_q\big]\Big) = \frac{1}{\beta}.$$

З огляду на це, нерівність (22) запишемо у вигляді

$$\left\|y\left(t_q\right)\right\| \le \left\|W\left(t_q,0\right)y\left(0\right)\right\| + \left\|y\left(t_q\right)\right\|\frac{1}{\beta}\|T^{-1}\|k\|T\|. \quad (23)$$

Оскільки система $\dot{y}\left(t\right)=Jy\left(t\right)$ стійка, то $\|W(t_q, 0)y(0)\| \to 0$ за $t_q \to +\infty$. Отже, за умови (18) нерівність (22) не виконується. Отримана суперечність показує, що розв'язки системи обмежені.

Максимальний показник Ляпунова розв'язків системи $\dot{y}\left(t\right)=Jy\left(t\right)$ дорівнює $\overline{\lambda}=-\beta$. Шукатимемо верхню оцінку величини $\overline{\lambda}$ системи (16) в інтервалі $\lambda > -\beta$.

Для доказу експоненційної стійкості покладемо в (17)

$$y(t) = \exp(\lambda t)z(t), \quad -\beta < \lambda < 0, \quad (24)$$

в результаті отримаємо

$$\dot{z}\left(t\right)=\left(J-\lambda I\right)z\left(t\right)+\exp\left[-\lambda t\right]T^{-1}f\left(T\exp\left[\lambda\left(t-\tau\left(t\right)\right)\right]z\left(t-\tau\left(t\right)\right),t\right). \quad (25)$$

Аналогічно наведеному вище доведенню знайдемо, що розв'язки (24) обмежені, якщо $\frac{1}{\beta+\lambda}\exp\left[-\lambda h\right]\|T^{-1}\|k\|T\|<1.$

Функція $V(\lambda)$ спадає за λ, за умовою (18) $V(\lambda) < 1$ при $\lambda = 0$, отже, при $V(\lambda) = 1\lambda < 0$. З огляду на (24) знайдемо, що система (16) експоненційно стійка з показником λ. Теорему доведено.

Для перевірки ефективності запропонованого методу проведено розрахунки та отримано умови стійкості для модельних прикладів розглянутих вище.

Так, для прикладу 1 теорема 3 дозволяє отримати умову експоненційної стійкості $k < 0.1458$, тоді як теорема 2 дає умову $k < 0.5184$.

Очевидно, що умови стійкості, які одержані з теореми 2 менш консервативні, проте метод, пропонований в останньому підрозділі, істотно простіше.

У випадку симетричної матриці A знайдений розв'язок є точним розв'язком вихідної задачі. Тому цей метод тим точніше, чим ближче матриця A до симетричної.

Висновки з дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Розроблено нові критерії стійкості систем диференціальних рівнянь із заданою лінійною частиною та невідомою обмеженою за нормою нелінійністю, що містить змінне запізнення.

Знайдено двосторонні оцінки максимального показника Ляпунова, виражені за допомогою норми нелінійного члена та максиму функції запізнення. Для деяких систем виявлено точне значення зазначеного показника. Отримані результати дають достатні (а в деяких випадках і необхідні) умови експоненційної стійкості системи, інваріантні щодо величини запізнення. Запропоновано простий метод розрахунку експоненційної стійкості, обчислювальна трудомісткість якого практично не залежить від системи. Наведено приклади, що ілюструють застосування розробленої методики.

Також результати даної методики показані у роботах [1] та [2].

Список використаних джерел:

1. Зевін О. А., Пославський С. Ю. Двосторонні оцінки найбільшого показника Ляпунова та критерії експоненційної стійкості нелінійних систем із довільним запізненням. *Автоматика і телемеханіка*. 2012. 1. С. 82–91.

2. Пославський С. Ю. Метод розрахунку стійкості нелінейних систем із запізненнями. *Вісник Харківського національного університету*. 2014. 1133(70). С. 48–55. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/VKhIMA_2014_1133_70_5

3. Niculescu S. I. Delay effects on stability (Lecture notes in control and information sciences). Springer. 2001. 388 p. DOI: 10.1007/1-84628-553-4

4. Хусаінов Д., Диблик Й., Ружичкова М. Лінійні динамічні системи з післядією. Представлення розв'язків, стійкість, управління, стабілізація. Киев. Нац. унів-т ім. Т. Шевченко. ГП Інформ.-аналіт. агенство. 2015. 252 с.

5. Richard J.-P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*. 2003. 39 (10). P. 1667–1694. DOI: 10.1016/S0005-1098(03)00167-5

6. Olbrot A.W. A sufficiently large time delay in feedback loop must destroy exponential stability of any decay rate. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1984. 29. – P. 367–368.

7. Abdallah G., Dorato P., Benitez-Read J., Byrne R. Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems. Proceeding of American control conference. 1993. P. 3106–3107. URL: https://digitalrepository.unm.edu/ece_fsp/80/

8. Goubet A., Dambrine M., Richard J.P. An extension of stability criteria for linear and nonlinear time delay systems. Proceeding of IFAC conference on system structure and control. 1995. P. 278–283.

9. Richard J. P. Some trends and tools for the study of time-delay systems. Proceeding of 2nd conference IMACS-IEEE on computational engineering in systems applications. Tunisia. Plenary lecture. 1998. P. 27–43.

10. Kharitonov V. L. Robust stability analysis of time delay systems: a survey. *Annual Reviews in Control*. 1999. 23. P. 185–196. DOI: 10.1016/s1367-5788(99)00021-8

11. Hale J.K., Verduyn-Lunel S.M. Introduction to functional differential equations. *Applied Mathematical Sciences*. Springer. 1993. 99. 450 p.

12. Разуміхин Б. С. Про стійкість систем із запізненням. *Прикладна математика і механіка*. 1956. 4. С. 500–512.

13. Разуміхин Б. С. Застосування методу Ляпунова до задач стійкості систем із запізненням. *Автоматика і телемеханіка*. 1960, 21 (6). С. 740–748.

14. Cheres E., Palmor Z. J, Gutman S. Quantitative measures of robustness for systems including delayed perturbations. *IEEE Trans. Autom. Control*. 1989. 34 (11). P. 1203–1205.

15. Wu H., Mizukami K. Robust stability criteria for dynamical systems including delayed perturbations. *IEEE Trans. Autom. Control*. 1995. 40 (3). P. 487–490. DOI: 10.1109/9.382907

16. Hou C., Gao F., Qian J. Stability criterion for linear systems with nonlinear delayed perturbations. Math. Anal. Appl. 1999. 2. P. 573–582. DOI: 10.1006/JMAA.1999.6490

References:

1. Зевін, О. А., Пославський, С. Ю. (2012). *Двосторонні оцінки найбільшого показника Ляпунова та критерії експоненційної стійкості нелінійних систем із довільним запізненням*. Автоматика і телемеханіка, (№ 1), 82–91.

2. Пославський, С. Ю. (2014). *Метод розрахунку стійкості нелінейних систем із запізненнями*. Вісник Харківського національного університету, (1133, № 70), 48–55. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/VKhIMA_2014_1133_70_5

3. Niculescu, S. I. (2001). *Delay effects on stability (Lecture notes in control and information sciences)*. Springer, 388. DOI: 10.1007/1-84628-553-4

4. Хусаінов, Д., Диблик, Й., Ружичкова, М. (2015). *Лінійні динамічні системи з післядією. Представлення розв'язків, стійкість, управління, стабілізація*. Киев. Нац. унів-т ім. Т. Шевченко. ГП Інформ.-аналіт. агенство, 252.

5. Richard, J.-P. (2003). *Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems.* Automatica, (39, № 10), 1667–1694. DOI: 10.1016/S0005-1098(03)00167-5

6. Olbrot, A. W. (1984). *A sufficiently large time delay in feedback loop must destroy exponential stability of any decay rate*. IEEE Transactions on Automatic Control, (№ 29), 367–368.

7. Abdallah, G., Dorato, P., Benitez-Read, J., Byrne, R. (1993). *Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems*. Proceeding of American control conference, 3106–3107. URL: https://digitalrepository.unm.edu/ece_fsp/80/

8. Goubet, A., Dambrine, M., Richard, J. P. (1995). *An extension of stability criteria for linear and nonlinear time delay systems*. Proceeding of IFAC conference on system structure and control, 278–283.

9. Richard, J. P. (1998). *Some trends and tools for the study of time-delay systems*. Proceeding of 2nd conference IMACS-IEEE on computational engineering in systems applications, Tunisia, Plenary lecture, 27–43.

10. Kharitonov, V. L. (1999). *Robust stability analysis of time delay systems: a survey*. Annual Reviews in Control, (№ 23), 185–196. DOI: 10.1016/s1367-5788(99)00021-8

11. Hale, J. K., Verduyn-Lunel, S. M. (1993). *Introduction to functional differential equations*. Applied Mathematical Sciences, Springer, (№ 99), 450.

12. Разуміхин, Б. С. (1956). *Про стійкість систем із запізненням*. Прикладна математика і механіка, (№ 4), 500–512.

13. Разуміхин, Б. С. (1960). *Застосування методу Ляпунова до задач стійкості систем із запізненням.* Автоматика і телемеханіка, (21, № 6), 740–748.

14. Cheres, E., Palmor, Z. J, Gutman, S. (1989). *Quantitative measures of robustness for systems including delayed perturbations*. IEEE Trans. Autom. Control, (34, № 11), 1203–1205.

15. Wu, H., Mizukami, K. (1995). *Robust stability criteria for dynamical systems including delayed perturbations*. IEEE Trans. Autom. Control, (40, № 3), 487–490. DOI: 10.1109/9.382907

16. Hou, C., Gao, F., Qian, J. (1999). *Stability criterion for linear systems with nonlinear delayed perturbations.* Math. Anal. Appl., (№ 2), 573–582. DOI: 10.1006/JMAA.1999.6490

Дата першого надходження статті до видання: 26.03.2026
Дата прийняття статті до друку після рецензування: 20.04.2026
Дата публікації (оприлюднення) статті: 30.05.2026