

Зайцева Т. А., кандидат технічних наук,
доцент, комп'ютерних технологій
Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара
ORCID: 0000-0002-6346-3390

Гончаров Я. А., аспірант кафедри комп'ютерних технологій
Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара
ORCID: 0009-0002-8994-8895

ЗАСТОСУВАННЯ АДАПТИВНИХ МЕТОДІВ У ЧИСЕЛЬНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ

У статті досліджено застосування адаптивних hp -підходів у межах методу скінченних елементів для моделювання просторової контактної взаємодії абсолютно жорсткого штамп з однорідним ізотропним пружним півпростором. Розглянуто задачу вдавнення абсолютно жорсткого штамп в пружний півпростір із двозв'язною контактною областю у формі симетрично здеформованого еліптичного кільця. Для чисельної реалізації побудовано різні варіанти адаптивних сіток, що відрізняються порядком апроксимації. Адаптація здійснюється шляхом локального h -уточнення сітки в зонах інтенсивних градієнтів напружень та p -збагачення для підвищення точності апроксимації.

Розроблено інтегрований програмний пакет. Архітектура пакету реалізована як багатомодульна система, що об'єднує можливості Ansys для розв'язання задач, Gmsh та APDL для адаптивного сіткоутворення, MATLAB для постпроцесінгу та Python/batch-скриптів для автоматизації обчислювального циклу. Модуль керування процесом забезпечує послідовність ітерацій та контроль проміжних даних. Модуль побудови матриці ваг визначає локальні області згущення сітки. Модуль адаптивного сіткоутворення генерує сітки зі змінним локальним розміром елементів.

Пакет підтримує обробку результатів, побудову графіків і таблиць, а також формування структур даних для наступних ітерацій адаптації. Незважаючи на обмеження щодо доступних порядків збагачення ($p = 1$ та $p = 2$), запропонована методологія забезпечує достатньо результативне управління процесами h - та p -адаптації. Проведений аналіз показав, що збільшення порядку апроксимації приводить до суттєвого зменшення похибки та покращення індексу ефективності апостеріорної оцінки, водночас забезпечуючи раціональне використання обчислювальних ресурсів.

Ключові слова: чисельне моделювання, адаптивні методи, контактна задача, штамп, теорія пружності, розподіл напружень, метод скінченних елементів; апроксимація; апостеріорна оцінка похибки; локальне уточнення сітки, Ansys.

Zaytseva T. A., Honcharov Ya. A. Application of adaptive methods in numerical modeling of mechanics problems

The article investigates the application of adaptive hp -methods within the finite element method for modelling the spatial contact interaction between a perfectly rigid punch and a homogeneous isotropic elastic half-space. The study considers the problem of indentation of a rigid punch into an elastic half-space with a doubly connected contact region in the form of a symmetrically deformed elliptical ring. For the numerical implementation, several variants of adaptive meshes with different approximation orders were constructed. Adaptation is performed through local h -refinement in zones with intensive stress gradients and p -enrichment to improve approximation accuracy.

An integrated software package has been developed. Its architecture is implemented as a multimodule system combining the capabilities of Ansys for solving the mechanical problem, Gmsh and APDL for adaptive mesh generation, MATLAB for post-processing, and Python/batch scripts for automating the computational cycle. The control module ensures the sequential execution of iterations, monitoring of intermediate data, and logging. The weight-matrix module constructs an importance field that identifies local regions requiring mesh refinement. The adaptive meshing module generates meshes with variable local element size, while the conversion module ensures correct transfer of meshes into a format compatible with Ansys.

The package supports result processing, generation of plots and tables, and formation of data structures for subsequent adaptation iterations. Despite limitations on the available approximation orders ($p = 1$ and $p = 2$), the implemented concept enables effective control of both h - and p -adaptation. The analysis shows that increasing the approximation order significantly reduces the error and improves the efficiency index of the a posteriori error estimate, while maintaining rational use of computational resources. The results obtained confirm the effectiveness of the hp -adaptive approach for contact mechanics problems with complex geometry and demonstrate its potential for further use in engineering computations.

Key words: numerical modelling, adaptive methods, contact problem, punch, elasticity theory, stress distribution, finite element method, approximation, a posteriori error estimate, local mesh refinement, Ansys.



Постановка проблеми. Сучасні інженерні задачі моделювання фізичних процесів характеризуються високою складністю математичних описів, що включають нелінійність матеріальних властивостей, складну геометрію областей та багатокомпонентні взаємодії. За таких умов отримання аналітичного розв'язку таких задач у більшості випадків є неможливим. Тому провідну роль у практичних розрахунках відіграє метод скінченних елементів (МСЕ), який забезпечує достатньо універсальний підхід до побудови наближених розв'язків для широкого класу диференціальних рівнянь. Разом із цим застосування МСЕ супроводжується появою різних типів похибок: модельної, дискретизаційної та обчислювальної. Це впливає на достовірність отриманих результатів і робить проблему контролю точності однією з ключових у чисельному аналізі. У цьому контексті особливого значення набувають апостеріорні оцінки похибки, які дозволяють кількісно оцінити якість наближеного розв'язку та забезпечують можливість адаптивного уточнення сітки.

У практиці чисельного моделювання, зокрема в програмному комплексі Ansys, адаптивні методи відіграють ключову роль у підвищенні точності розв'язків, отриманих методом скінченних елементів. Адаптація сітки ґрунтується на локальному аналізі похибки, що дозволяє автоматично уточнювати дискретизацію в областях із високими значеннями напружень, деформацій або інших фізичних величин. У Ansys реалізовано декілька стратегій адаптації, а саме, *h*-, *p*- та *hp*-методи, які забезпечують гнучке керування точністю моделювання залежно від характеру задачі.

Важливою складовою є *адаптація за похибкою*, коли Ansys самостійно оцінює локальну помилку розв'язку та автоматично покращує сітку саме в тих областях, де похибка найбільша. У CFD-модулях, таких як Fluent і CFX, адаптація відіграє ще більшу роль. Система може покращувати сітку за градієнтами швидкості, температури чи турбулентності, за кривизною геометрії та ін. Також доступна *адаптація в часі*, коли сітка змінюється під час розрахунку.

Для нестационарних задач, наприклад, Ansys підтримує *адаптивний часовий крок*, автоматично зменшуючи його при швидких змінах у системі та збільшуючи при стабільному розв'язку. Крім того, у середовищах DesignXplorer та OptiSLang доступна *адаптивна оптимізація*, яка дозволяє автоматично змінювати параметри моделі, будувати метамоделі та визначати найважливіші параметри конструкції.

Використання апостеріорних оцінок похибки в адаптивних процедурах дає змогу не лише підвищити якість чисельного розв'язку, але й оптимізувати обчислювальні витрати, зосереджуючи ресурси на найбільш критичних ділянках розрахункової області. Таким чином, адаптивні підходи є важливим інструментом для реалізації ефективного чисельного аналізу складних інженерних систем.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У сучасній науковій літературі МСЕ представлений надзвичайно широким спектром досліджень, що охоплюють як фундаментальні теоретичні аспекти, так і прикладні інженерні реалізації. Значний обсяг робіт, присвячених розвитку, удосконаленню та практичному застосуванню цього методу, свідчить про його ключову роль у чисельному моделюванні складних механічних і фізичних процесів.

У роботі [1] систематизовано математичні принципи МСЕ, зокрема формулювання елементів, чисельні алгоритми та особливості їх реалізації в інженерних задачах, що робить це джерело базовим для подальших досліджень у галузі чисельного моделювання. Видання [2] розширює ці положення, зосереджуючись на нелінійній механіці суцільного середовища, включно з кінематикою великих деформацій, складними матеріальними моделями та чисельними методами. У свою чергу, робота [3] поєднує теоретичні концепції МСЕ з практичними рекомендаціями щодо побудови скінченно-елементних моделей, акцентуючи увагу на типових помилках, особливостях апроксимації та застосуванні методу в інженерній практиці.

Питання побудови ефективних апостеріорних оцінок похибки та адаптивних стратегій у МСЕ активно досліджується впродовж останніх десятиліть, особливо в контексті *hp*-адаптивних методів, які поєднують локальне уточнення сітки (*h*-адаптацію) та підвищення порядку апроксимації (*p*-адаптацію).

У роботі [4] запропоновано підхід до декомпозиції апостеріорної оцінки похибки, побудованої на основі еталонного розв'язку (*reference solution*). Автори розглядають структуру оцінки в контексті *hp*-адаптивного методу та демонструють, що поділ оцінки на локальні компоненти дозволяє точніше визначати області, де необхідне уточнення сітки або підвищення порядку апроксимації. Класичні результати щодо адаптивних *hp*-методів закладені у статті [5]. Особливу увагу приділено адаптивній *hp*-версії в одномірному випадку. Автори показали, що поєднання локального уточнення сітки та збільшення порядку апроксимації забезпечує експоненційну збіжність для широкого класу задач, що є теоретичним аргументом на користь *hp*-методів. Монографія [6] присвячена *hp*-методам для задач із сингулярними збуреннями. У роботі детально описано конструкцію апроксимаційних просторів, аналіз збіжності та методи побудови адаптивних стратегій. У статті [7] розглянуто цільово-орієнтовані (*goal-oriented*) адаптивні методи для еліптичних задач. Автори пропонують удосконалені алгоритми, що підвищують точність оцінювання розв'язку. Цільово-орієнтована адаптація є важливою для задач, де інтерес зосереджено не на глобальній нормі похибки, а на конкретних фізичних величинах (наприклад, напруженнях у критичних точках конструкції).

Подальші дослідження у сфері МСЕ залишаються актуальними з огляду на зростаючу складність інженерних задач та підвищені вимоги до точності чисельного моделювання. Актуальність також зумовлена необхідністю моделювання багатофізичних процесів, складних геометрій та матеріалів із нелінійною

поведінкою, що вимагає розроблення більш гнучких і стійких чисельних алгоритмів. Сукупність цих чинників підкреслює важливість продовження досліджень, спрямованих на підвищення ефективності та надійності сучасних скінченно-елементних технологій.

Метою дослідження є розробка та реалізація адаптивної hp-методики для моделювання просторової контактної взаємодії жорсткого штампа з пружним півпростором, створення програмного інструментарію для автоматизації обчислювального процесу та дослідження точності отриманих результатів на основі апостеріорних оцінок похибки.

Виклад основного матеріалу. У просторовій постановці розглядається вдавлення в однорідний ізотропний пружний півпростір $x_3 \leq 0$ абсолютно жорсткого штампа з плоскою гладкою основою; у плані контактна область є двозв'язною Ω , обмеженою двома замкненими концентричними контурами Γ_1, Γ_2 (контакт у формі симетрично zdeформованого еліптичного кільця, див. рис. 1), при цьому дотичні напруження на площині Ox_1x_2 відсутні. Контактна область задається як двозв'язна. У моделі не враховується сила тертя між штампом і півпростором [8, 9].

Для чисельної реалізації використано матеріал Structural Steel: $\rho = 7850$ кг/м³, $E = 2.0 \times 10^{11}$ Па (200 ГПа), $\nu = 0.3$, $G \approx 7.6923 \times 10^{10}$ Па; штампу призначено той самий матеріал, але його оголошено абсолютно твердим (Rigid). Геометрія штампа: зовнішній діаметр 100 мм, внутрішній – 40 мм вздовж більшої напіввісі; зовнішній діаметр 62 мм, внутрішній – 18 мм вздовж меншої напіввісі; навантаження центрально прикладене $P = 1000$ Н.

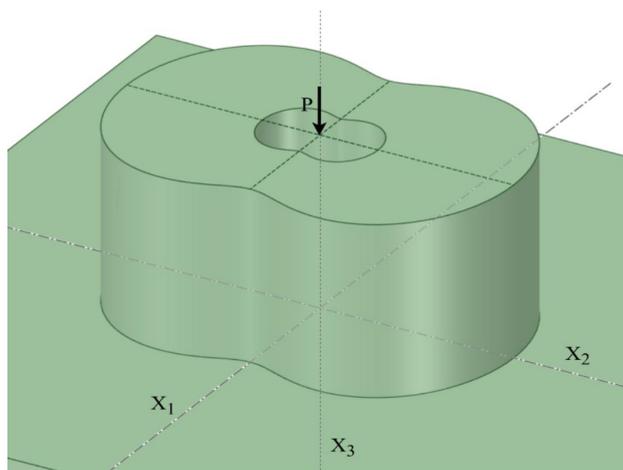


Рис. 1. Загальна схема взаємодії контактуючих тіл

У працях [8, 9] для зазначеної контактної задачі наведено як строгий аналітичний розв'язок, так і чисельний, що забезпечує можливість їх використання як еталонних референтних даних для верифікації коректності та кількісного оцінювання точності адаптивних методів, запропонованих у цьому дослідженні.

Для оцінювання похибки отриманого розв'язку будемо застосовувати апостеріорну оцінку точності. Загальний формальний запис апостеріорної оцінки має такий вигляд:

$$\|u - u_h\| \leq M(u_h, D),$$

де u – точний розв'язок у межах розглянутої математичної постановки [8, 9], u_h – наближений чисельний розв'язок, D – початкові дані задачі (коефіцієнти рівнянь, геометрія області, права частина, граничні умови тощо), M – мажоранта.

Як показник якості роботи апостеріорної оцінки використаємо індекс ефективності, який характеризує ступінь переоцінювання мажорантою істинної похибки та дозволяє виявити можливість її недооцінки. Задаємо його наступним чином:

$$I_{\text{eff}} = \frac{M(u_h, D)}{u - u_h}.$$

Опис програмного пакету. Розроблений програмний пакет є інтегрованим рішенням для автоматизації чисельного моделювання контактної взаємодії тіла складної форми з пружним півпростором із використанням адаптивних hp-схем МСЕ. Адаптація реалізується шляхом h-уточнення сітки в зоні контакту та в областях інтенсивної зміни напружено-деформівного стану. Р-збагачення застосовується для оцінювання локальної похибки та визначення зон наступного уточнення. Архітектура програмного пакету реалізована як багатомодульна система, що поєднує розв'язання задач у Ansys [10], адаптивне сіткоутворення в Gmsh або Ansys APDL, поспроцесінг даних у MATLAB і автоматизацію обчислювального циклу засобами batch та

Python. Така структура забезпечує модульність, відтворюваність і масштабованість для різних постановок задач. У складі розробленого програмного пакета функціонують такі основні модулі:

– Модуль керування обчислювальним процесом (*AutoRun.bat*) виконує роль «диспетчера» ітераційного циклу. Він забезпечує послідовний запуск етапів моделювання, перевірку наявності необхідних проміжних файлів, керування каталогами ітерацій та ведення журналів виконання.

– Модуль побудови матриці ваг W (*WeightMatrix.m*) реалізує інтерполяцію результатів на регулярну сітку, нормування величин і формування матриці ваг W , що відображає локальну «важливість» області для згущення сітки.

– Модуль адаптивного сіткоутворення (*model_adaptiveV.geo*) створено для опису правил побудови скінченно-елементної сітки з керуванням локальним розміром елементів. Ключовим є наступне – області з високими значеннями W отримують менший характерний розмір елемента, тоді як «спокійні» зони – грубішу сітку. Це дозволяє концентрувати обчислювальні ресурси у зоні контакту та поблизу концентраторів напружень.

– Модуль конвертації та інтеграції сіток (*halfspace_fix.mac*, *mesh_converter.py*) виконує перетворення сіток Gmsh у формат, сумісний з Ansys (наприклад, *.cbd*). Оскільки адаптивне сіткоутворення може виконуватися поза Ansys, необхідним є етап коректного перенесення сітки у формат, сумісний з розв'язувачем. Python-скрипт конвертації (*mesh_converter.py*) забезпечує перетворення даних сітки (вузли, елементи, групи) у представлення, прийнятне для Ansys. APDL-макриси (наприклад, *halfspace_fix.mac*) використовуються для технічної інтеграції. Модуль фактично забезпечує «міст» між генератором сітки та МСЕ-розв'язувачем.

– Модуль постпроцесінгу (*MATLAB*) виконує обробку результатів, обчислює узагальнені показники, формує таблиці й графіки.

Середовище розроблення програмного пакету сформовано на основі інтегрованої взаємодії інструментів Ansys Workbench/Mechanical, MAPDL/APDL, MATLAB, Gmsh та Python, а також batch-скриптів для керування модулями пакету.

Подання даних і схема обчислень визначаються набором таких основних структур: масивами напружень, даними що до регулярних інтерполяційних сіток, матрицею вагових коефіцієнтів W , а також файлами опису фонові сітки для Gmsh. Обмеженням реалізації є підтримка у розв'язувачі лише порядків $p = 1$ та $p = 2$ для певних типів скінченних елементів. Разом з тим, концепція оцінювання похибки за p -рівнями та керування h -згущенням не є принципово обмеженою цими порядками.

Геометрію та початкову сітку МСЕ для задачі, описаної раніше, надано на рис. 2. Процес адаптації сітки завершується після досягнення величини відносної похибки менше ніж 7%. На рис. 3 і рис. 4 наведено результати адаптації сіток для випадків $p = 1$ та $p = 2$ відповідно.

У таблиці 1 наведено порівняльні результати чисельних розрахунків для різних варіантів адаптації сітки та різних порядків апроксимації. Показники відображають вплив густини сітки та рівня p -збагачення на точність розв'язку та ефективність апостеріорної оцінки похибки. Зіставлення цих даних дає змогу оцінити, як адаптація та підвищення порядку апроксимації впливають на збіжність, точність і якість апостеріорної оцінки.

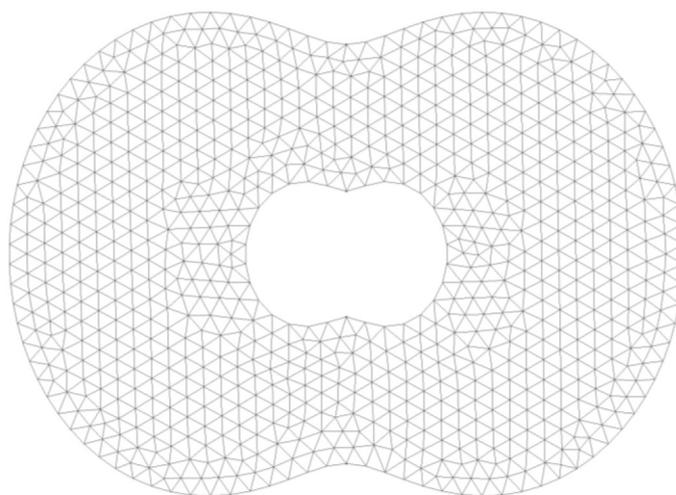


Рис. 2. Геометрія і початкова сітка МСЕ

Показники, наведені в таблиці, відображають ключові характеристики якості чисельного розв'язку. Кількість вузлів визначає загальну кількість точок дискретизації моделі. Кількість елементів у зоні контакту характеризує густину сітки саме в області, де виникають найбільші напруження та де потрібна підвищена

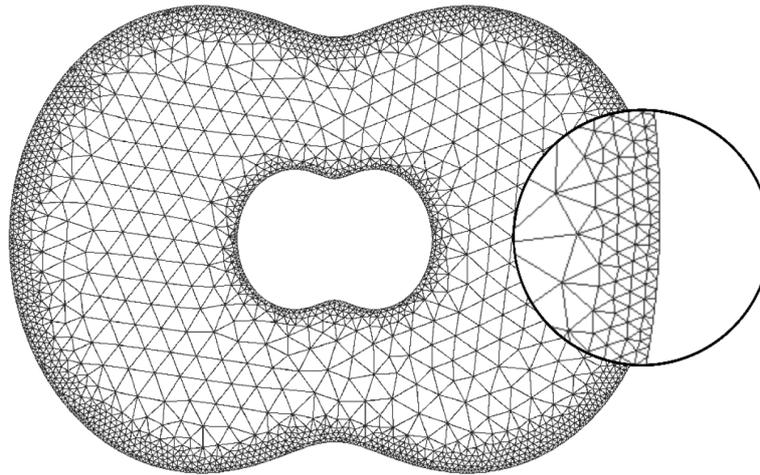


Рис. 3. Сітка МСЕ після адаптації для випадку $p = 1$

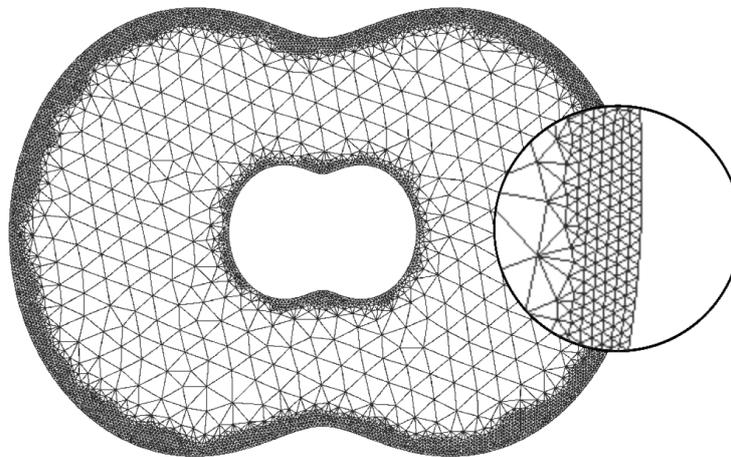


Рис. 4. Сітка МСЕ після адаптації для випадку $p = 2$

точність. Помилка (%) показує відносну різницю між чисельним та еталонним розв'язком, тобто рівень точності моделювання. Індекс ефективності демонструє, наскільки точно мажоранта оцінює реальну похибку: значення, близьке до одиниці, свідчить про високу якість апостеріорної оцінки.

Таблиця 1

Порівняння розрахункових результатів для різних випадків адаптації

	Кількість вузлів	Кількість елем. у зоні контакту	Помилка %	Індекс ефективн
Рис. 2, $p = 1$	334	590	29.1 %	1.91
Рис. 2, $p = 2$	1258	590	23.7 %	1.8
Рис. 3, $p = 1$	5840	10 894	11.8 %	1.4
Рис. 3, $p = 2$	22 544	10 894	9.9 %	1.31
Рис. 4, $p = 1$	12 902	25 048	7.1 %	1.32
Рис. 4, $p = 2$	50 852	25 048	6.2 %	1.25

На рис. 2 сітка недостатньо точна, похибка велика. Індекс ефективності майже 2 означає, що апостеріорна оцінка переоцінює реальну похибку майже вдвічі. Підвищення порядку p на грубій сітці дає помірне покращення точності (похибка зменшується на ~18 %), але індекс ефективності залишається високим. Це типовий результат для грубої сітки.

На рис. 3 на адаптованій сітці p -збагачення знову дає зменшення похибки (~16 %), а індекс ефективності покращується, наближаючись до 1.3.

На рис. 4 найкращий результат серед трьох варіантів. Ефект від підвищення p зберігається. Похибка зменшилася до 6.2 %, а індекс ефективності став 1.25, що свідчить про високу якість апостеріорної оцінки. Сітка стає густішою саме там, де це потрібно, без надмірного збільшення загальної кількості вузлів.

Висновки. Проведене дослідження підтверджує ефективність застосування адаптивних hp-методів для чисельного аналізу просторових контактних задач із двозв'язною областю контакту. Використання апостеріорних оцінок похибки дає змогу цілеспрямовано уточнювати сітку в критичних зонах та контролювати якість отриманого розв'язку.

Загальний висновок можна подати так. Зі збільшенням порядку апроксимації p точність чисельного розв'язку помітно підвищується, а індекс ефективності наближається до одиниці, що свідчить про більш надійну та стабільну оцінку похибки. Адаптивні методи забезпечують зменшення похибки у 4–5 разів без суттєвого збільшення кількості вузлів, що робить їх ефективним інструментом для оптимізації обчислювальних витрат. Найкращий баланс між точністю та продуктивністю демонструє варіант із порядком апроксимації $p = 2$, який забезпечує найнижчу похибку та найвищу якість апостеріорної оцінки.

Розроблений програмний пакет продемонстрував здатність автоматизувати повний цикл адаптивного моделювання та забезпечити відтворюваність результатів. Отримані висновки свідчать про доцільність подальшого розвитку hp-адаптивних стратегій та їх інтеграції в сучасні інженерні комплекси для підвищення точності та надійності чисельного моделювання складних механічних систем.

Список використаних джерел:

1. Bathe K. J. Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1982. URL: <https://www.scribd.com/document/359408011/FEA-Finite-Element-Procedures-by-K-J-Bathe-pdf>
2. Bonet J., Wood R. D. Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. URL: <https://www.researchgate.net/profile/Nirmala-Svsg/post/How-to-use-shell-element-of-vector-form-intrinsic-finite-element/attachment/59d6349a79197b80779923f2/AS%3A380479242031115%401467724728999/download/666.pdf>
3. Cook R. D., Malkus D. S., Plesha M. E. Concepts and Applications of Finite Element Analysis. New York : Wiley, 2002. URL: <https://pdfcoffee.com/robert-d-cook-david-s-malkus-michael-e-plesha-concepts-and-applications-of-finite-element-analysis-3rd-edition-1989-483-pdf-free.html>.
4. Drebotiy R., Shynkarenko H. Elementwise decomposition of a posteriori error estimator based on reference solution for hp-adaptive finite element method. *Visnyk of the Lviv University. Series Applied Mathematics and Informatics*, 2018, no. 26, pp. 56–69. URL: http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?C21COM=2&I21DBN=UJRN&P21DBN=UJRN&IMAGE_FILE_DOWNLOAD=1&Image_file_name=PDF/Vlnu_prmat_2018_26_10.pdf
5. Gui W., Babuška I. The h, p and h-p versions of the finite element method in 1 dimension. Part 3: The adaptive h-p version. *Numerische Mathematik*, 1986, vol. 49, pp. 659–683. URL: <https://apps.dtic.mil/sti/tr/pdf/ADA156626.pdf>
6. Melenk J. M. hp-Finite Element Methods for Singular Perturbations. Berlin: Springer, 2002. 326 p. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/b84212>
7. Bürg M., Nazarov M. Goal-oriented adaptive finite element methods for elliptic problems revisited. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2015, vol. 287, pp. 125–147. URL: https://www.researchgate.net/publication/272024852_Goal-Oriented_Adaptive_Finite_Element_Methods_for_Elliptic_Problems_Revisited
8. Зайцева Т. А., Шишканова Г. А. Розв'язання просторових контактних задач для неklasичних багатозв'язних областей. Дніпро: Вид-во ДНУ, 2011. 192 с.
9. Honcharov Y. A., Zaytseva T. A. Computer Simulation of the Interaction of a Doubly Bound in the Plane of a Punch and an Elastic Half-Space. *Problems of Applied Mathematics and Mathematical Modeling*, 2023, vol. 23, pp. 46–52. URL: <https://journals.indexcopernicus.com/api/file/viewById/2294060>.
10. Ansys Free Student Software Downloads. URL: <https://www.ansys.com/academic/freestudent-products> (дата звернення: 18.12.2025).

References:

1. Bathe, K. J. (1982). Finite element procedures in engineering analysis. Prentice Hall. Retrieved from: <https://www.scribd.com/document/359408011/FEA-Finite-Element-Procedures-by-K-J-Bathe-pdf>
2. Bonet, J., & Wood, R. D. (2008). Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. Cambridge University Press. Retrieved from: <https://www.researchgate.net/profile/Nirmala-Svsg/post/How-to-use-shell-element-of-vector-form-intrinsic-finite-element/attachment/59d6349a79197b80779923f2/AS%3A380479242031115%401467724728999/download/666.pdf>
3. Cook, R. D., Malkus, D. S., & Plesha, M. E. (2002). Concepts and applications of finite element analysis. Wiley. Retrieved from: <https://pdfcoffee.com/robert-d-cook-david-s-malkus-michael-e-plesha-concepts-and-applications-of-finite-element-analysis-3rd-edition-1989-483-pdf-free.html>
4. Drebotiy, R., & Shynkarenko, H. (2018). Elementwise decomposition of a posteriori error estimator based on reference solution for hp-adaptive finite element method. *Visnyk of the Lviv University. Series Applied Mathematics and Informatics*, 26, 56–69. Retrieved from: <https://pdfcoffee.com/robert-d-cook-david-s-malkus-michael-e-plesha-concepts-and-applications-of-finite-element-analysis-3rd-edition-1989-483-pdf-free.html>

-
5. Gui, W., & Babuska, I. (1986). The h, p and h-p versions of the finite element method in 1 dimension. Part 3: The adaptive h-p version. *Numerische Mathematik*, 49, 659–683. Retrieved from: <https://apps.dtic.mil/sti/tr/pdf/ADA156626.pdf>
 6. Melenk, J. M. (2002). hp-finite element methods for singular perturbations. Springer. Retrieved from: <https://link.springer.com/book/10.1007/b84212>
 7. Bürg, M., & Nazarov, M. (2015). Goal-oriented adaptive finite element methods for elliptic problems revisited. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 287, 125–147. Retrieved from: <https://www.researchgate.net/.../272024852>
 8. Zaitseva, T. A., & Shyshkanova, H. A. (2011). Rozv'yazannia prostoroovykh kontaknykh zadach dla neklasychnykh bahatozviaznykh oblastei [Solution of spatial contact problems for non-classical multiply connected domains]. Dnipro National University Press.
 9. Honcharov, Y. A., & Zaytseva, T. A. (2023). Computer simulation of the interaction of a doubly bound in the plane of a punch and an elastic half-space. *Problems of Applied Mathematics and Mathematical Modeling*, 23, 46–52. Retrieved from: <https://journals.indexcopernicus.com/api/file/viewByFileId/2294060>
 10. Ansys. (2025). *Ansys free student software downloads*. Retrieved from: <https://www.ansys.com/academic/freestudent-products>

Дата першого надходження статті до видання: 30.11.2025

Дата прийняття статті до друку після рецензування: 22.12.2025

Дата публікації (оприлюднення) статті 27.01.2026