

**Сохацький А. В.**, доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник Інституту транспортних систем та технологій Національної академії наук України  
ORCID: 0000-0002-3593-6517

## МОДЕЛЮВАННЯ ТУРБУЛЕНТНИХ ТЕЧІЙ НАВКОЛО НАЗЕМНИХ ТРАНСПОРТНИХ АПАРАТІВ З ЗАСТОСУВАННЯМ ГІБРИДНИХ ПІДХОДІВ

*Практичне застосування прямого числового моделювання турбулентності (Direct Numerical Simulation – DNS) та методу моделювання великих вихорів (Large Eddy Simulation – LES) пов'язане з цілим рядом проблем. Це недостатня продуктивність обчислювальної техніки, а також ряд методичних проблем.*

*Протягом останніх десятиліть з'явилися моделі турбулентних течій, що передбачають одночасне використання методу LES та осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса (Reynolds Averaged Navier-Stokes – RANS). Це так звані гібридні RANS – LES моделі. Застосування гібридних підходів спрощує вирішення певних задач аеродинаміки. На сьогодні поширені декілька десятків моделей RANS – LES. Їх подальшому удосконаленню і розвитку присвячено величезне число робіт. Найпоширенішим методом став метод моделювання від'єднаних вихорів – Detached Eddy Simulation або DES. Це свідчить про позитивні сторони ідеї, що лежить в основі гібридних моделей. Проте і на сьогодні не має повної задоволеності вже існуючими моделями.*

*Побудова математичної моделі турбулентної течії і вимагає подальшого вивчення фізичних особливостей формування локальних нестационарних характеристик турбулентних потоків.*

*При числовому розв'язуванні задач аеродинаміки з використанням осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса розв'язується не самі диференціальні рівняння, а їх скінченно-різницеві аналоги. Необхідно коректно виконувати фізичні закони збереження маси, кількості руху, енергії. Це є непростою задачею для сіткових методів.*

*В роботі, для числового розв'язування задачі з розрахунку характеристик турбулентної течії навколо наземного транспортного засобу, обрано модель течії в'язкого стисливого газу, що описується осередненими за Рейнольдсом рівняннями Нав'є-Стокса. Використовується багатоблоковий підхід та криволінійна систему координат.*

*Для замикання осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса обрано метод DES, що є подальшим розвитком моделі турбулентності Спаларта – Аллмараса в реалізації відокремлених вихорів. Для проведення досліджень розроблено відповідну методіку, побудовано алгоритми та написано комплекс програмного забезпечення на мові програмування Fortran-95.*

*Виконано розрахунки турбулентної течії навколо високошвидкісного транспортного апарата з несучим корпусом поблизу шляхової структури. Отримано розподіл ізобар у площині XOY області течії, ізомех у площині XOY розрахункової області, ізоїнії складової вектора швидкості потоку у площині XOZ і області течії та ізоїнії завихреності у площині XOY області течії.*

*Ключові слова: моделювання турбулентності, числове моделювання, осереднені за Рейнольдсом нестационарні рівняння Нав'є-Стокса, моделювання від'єднаних вихорів, аеродинаміка транспортних апаратів.*

### **Sokhatskyi A. V. Modeling of turbulent flows around ground transport vehicles using hybrid approaches**

*The practical application of Direct Numerical Simulation (DNS) and Large Eddy Simulation (LES) is associated with a number of problems. These include insufficient computing power and a number of methodological issues.*

*Over the past decades, models of turbulent flows have appeared that involve the simultaneous use of the LES method and Reynolds-averaged Navier-Stokes equations (RANS). These are the so-called hybrid RANS-LES models. The use of hybrid approaches simplifies the solution of certain aerodynamic problems. Today, there are several dozen RANS-LES models in use. A huge number of works are devoted to their further improvement and development. The most common method has become the detached eddy simulation (DES) method. This demonstrates the positive aspects of the idea underlying hybrid models. However, even today, there is no complete satisfaction with the existing models.*

*The construction of a mathematical model of turbulent flow requires further study of the physical characteristics of the formation of local unsteady characteristics of turbulent flows.*

*When solving aerodynamic problems numerically using Reynolds-averaged Navier-Stokes equations, it is not the differential equations themselves that are solved, but their finite difference analogues. It is necessary to correctly apply the physical laws of conservation of mass, momentum, and energy. This is a difficult task for mesh methods.*

*In this work, for the numerical solution of the problem of calculating the characteristics of turbulent flow around a ground vehicle, a model of viscous compressible gas flow is chosen, which is described by Reynolds-averaged Navier-Stokes equations. A multi-block approach and a curvilinear coordinate system are used.*



---

To close the Reynolds-centered Navier-Stokes equations, the DES method was chosen, which is a further development of the Spalart-Allmaras turbulence model in the implementation of isolated vortices. To conduct the research, an appropriate methodology was developed, algorithms were constructed, and a software package was written in the Fortran-95 programming language.

Calculations were performed for turbulent flow around a high-speed transport vehicle with a lifting body near a road structure. The distribution of isobars in the XOY plane of the calculation area, isochores in the XOY plane of the calculation area, isolines of the velocity vector component in the XOZ plane of the calculation area, and isolines of vorticity in the XOY plane of the calculation area were obtained.

Key words: turbulence modeling, numerical modeling, Reynolds-averaged unsteady Navier-Stokes equations, detached vortex modeling, aerodynamics of transport vehicles.

**Постановка проблеми.** Сучасні методи моделювання турбулентних течій побудовані на основі досягнень з вивчення фізичних властивостей в'язкої рідини та газу. Їх можна розділити на три групи: підходи, що базуються на використанні осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса (Reynolds Averaged Navier-Stokes – RANS); два класичних підходи – пряме числове моделювання турбулентності (Direct Numerical Simulation – DNS) і метод моделювання великих вихорів (Large Eddy Simulation – LES) [1–5, 8, 9, 11, 32, 35, 40]. Комплексну групу формують гібридні підходи, що спираються на спільне використання RANS і LES підходів для різних областей течії [1, 2, 5, 8, 9, 11, 23, 24, 28, 30–32].

На сьогодні найбільш поширеними підходами для числового розв'язування практичних задач є методи, що базуються на використанні осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса (Reynolds Averaged Navier-Stokes – RANS) [1–5, 8, 9, 11, 32]. Вони замикаються за допомогою тієї або іншої напівемпіричної моделі турбулентності.

Досвід математичного моделювання гідроаеродинамічних процесів показав, що найбільш досконалими є: пряме числове моделювання турбулентності (Direct Numerical Simulation – DNS) і метод моделювання великих вихорів (Large Eddy Simulation – LES) [1–6, 35]. Метод DNS ґрунтується на безпосередньому прямому числовому розв'язуванні тривимірних нестационарних рівнянь Нав'є-Стокса з розрізненням усіх просторово-часових масштабів турбулентності [1–6, 29]. У методі LES також розв'язуються рівняння Нав'є-Стокса, але після проведення попередньої просторової фільтрації [1, 6, 29, 35, 45]. Цей підхід дозволяє виключити з розгляду частину просторово-часових масштабів, що дозволяє понизити вимоги до технічних характеристик обчислювальної техніки. Для урахування впливу відфільтрованих («підсіткових») масштабів турбулентності притягуються ті або інші напівемпіричні моделі турбулентності [1–6]. В науковій літературі, для підкреслення кардинальних відмінностей методу LES від підходів, що використовуються для замикання RANS, їх називають «підсітковими» [1–6].

До окремої групи слід було б віднести гібридні підходи, що спираються на використання RANS і LES підходів для різних областей течії [1–6, 45–47]. Вважається, що вони є найбільш розповсюдженими для практичного застосування, виходячи з можливостей обчислювальної техніки та меж їх використання [1–6, 45–47]. Проте універсальна модель опису турбулентної течії і на сьогодні відсутня.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Напівемпірична теорія турбулентності бере початок з класичної роботи О. Рейнольдса [6]. У ній був сформульований підхід для опису турбулентної течії, який згодом був названий його іменем. Таким чином з'явилися рівняння Рейнольдса. Або, як ще їх називають; осереднені за Рейнольдсом рівняння Нав'є-Стокса. У випадку нестисливої рідини рівняння Рейнольдса виходять з рівнянь Нав'є-Стокса з використанням наступної процедури осереднення:

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} f(\tau) d\tau, \quad (1)$$

де  $f$  – функція осереднення,  $t$  – час, а  $2T$  – період осереднення.

Період осереднення передбачається досить великим в порівнянні з часовими масштабами усіх турбулентних неоднорідностей, що присутні даній течії, і досить малим в порівнянні з характерним часовим масштабом осередненої течії. Відповідно до роботи Рейнольдса [6], процедура осереднення припускає виконання наступних умов [2,5,6] :

$$\overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}, \quad \bar{c} = c, \quad \overline{cf} = c\bar{f}, \quad \overline{\partial f/\partial s} = \partial \bar{f}/\partial s, \quad (2)$$

де  $f, g$  – довільні функції, які можуть бути представлені як суми середніх і пульсаційних змінних  $f = \bar{f} + f'$  та  $g = \bar{g} + g'$ ,  $c$  – довільна константа, а  $s$  – просторова координата або час.

У випадку моделювання течії газу, що є стисливим, використовують більш досконалий спосіб осереднення. Він називається осереднення за Фавром. При цьому густина  $\rho$  і тиск  $p$  осереднюються за Рейнольдсом, а для інших змінних вводяться так звані середньозважені значення

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}}. \quad (3)$$

У відповідності з даним підходом розрахунок турбулентних течій стисливої рідини проводиться шляхом безпосереднього розв'язування рівнянь Нав'є-Стокса, що осереднюються за Рейнольдсом для густини та тиску [2, 4].

Використання осереднення за Фавром приводить вихідну систему рівнянь до дещо простішого вигляду, оскільки не з'являються додаткові доданки в рівнянні нерозривності для нестисливих течій [2, 4]. При цьому нестационарний член в диференціальному рівнянні для кількості руху не вимагає додаткового моделювання. У роботі [7] на основі числового моделювання шару зміщення показано, що в діапазоні малих чисел Маха обидва способи осереднення приводять до однакових результатів [2, 4]. Є підстави вважати, що використання осереднення за Фавром у ряді випадків призводить до чисельної нестійкості через форму рівняння нерозривності [8]. Для подолання нестійкості в праву частину рівняння нерозривності необхідно додавати дифузійний член [2, 4].

Незважаючи на характер осередненої течії, її вимірність та стаціонарність чи нестационарність, необхідно розв'язувати тривимірні нестационарні рівняння Нав'є-Стокса [2, 4]. Це пов'язано з тим, що турбулентність є принципово тривимірним і нестационарним явищем [2–5]. На жаль для цілого ряду моделей забезпечення необхідної точності розрізнення усіх просторово-часових масштабів турбулентності є проблематичним [2–5].

Слід звернути увагу на те, що для цілого ряду моделей необхідно забезпечити достатню точність розрізнення усіх просторово-часових масштабів турбулентності.

Осереднені за Рейнольдсом рівняння Нав'є-Стокса (RANS) для досконалого стислого газу, можуть бути записані в наступному вигляді [2, 4]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} = 0, \\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\tau_{ik} + \tau_{t,ik}) - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k H)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} [u_i (\tau_{ik} + \tau_{t,ik}) - (q_k + q_{t,k})], \\ \rho = pm/(RT), \end{cases} \quad (4)$$

де  $x_i$  – декартові координати ( $i = 1, 2, 3$ );  $u_i$  – компоненти вектора швидкості осередненої течії;  $E = C_v T + u_k u_k / 2$ ,  $H = E + p/\rho = E_p T + u_k u_k / 2E$  – питома повна енергія та повна ентальпія газу;  $T$  – температура;  $C_v$ ,  $C_p = C_v + R/m$  – питомі теплоємності при сталому об'ємі та постійному тиску;  $R = 8314,34$  Дж/моль · (кмоль · К) – універсальна газова стала;  $m$  – молекулярна маса.

Компоненти тензора молекулярної в'язкої напруги і вектора щільності теплового потоку за рахунок молекулярної теплопровідності визначаються відповідно за допомогою закону реології Ньютона та закону Фур'є [2, 4]

$$\tau_{ij} = 2\mu(T) \left[ S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij} \right], \quad q_i = \mu(T) \frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad (5)$$

де  $S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  – тензор швидкостей деформацій,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера, а  $\mu(T)$  і  $\lambda(T)$  – коефіцієнти молекулярної динамічної в'язкості і теплопровідності.

Компоненти тензора рейнольдсових (турбулентних) напружень  $\tau_{i,j} = -\overline{\rho u_i' u_j'}$  та вектора рейнольдсового (турбулентного) теплового потоку  $q_{t,i} = -\rho C_p \overline{u_i' T'}$ , записуються в рівняннях(4) при осередненні нелінійних конвективних членів вихідних рівнянь Нав'є-Стокса і перенесення енергії. Їх безпосередній зв'язок з параметрами осередненого руху залишається невідомим [2, 4].

Перевагою рівнянь RANS перед вихідними рівняннями Нав'є-Стокса є те, що вони сформульовані безпосередньо відносно осереднених за часом характеристик течії. Вони є вихідним результатом в задачах механіки рідини та газу. Зникає необхідність розрахунку локальних нестационарних характеристик турбулентних потоків шляхом інтегрування тривимірних нестационарних рівнянь Нав'є-Стокса для DNS, що представляють основний інтерес в задачах аеродинаміки [2, 4].

Вважається, що в реальних умовах течії, на даний час розвитку обчислювальної техніки, проведення розрахунку локальних нестационарних характеристик турбулентних потоків є абсолютно неможливими [2–5]. Слід відзначити, що рівняння RANS є незамкнутими, оскільки вони містять невідомий тензор рейнольдсових напружень та вектор турбулентного теплового потоку [2, 4, 5]. Для їх практичного використання потрібні додаткові співвідношення, що зв'язують ці величини з характеристиками осередненого руху [2–8]. Ці додаткові співвідношення можна отримати шляхом використанням емпіричної інформації. Дані співвідношення прийнято називати моделями турбулентності для напружень Рейнольдса або для других моментів [2–8].

---

Альтернативний підхід до вирішення проблеми замикання рівнянь Рейнольдса полягає у використанні рівнянь перенесення рейнольдсових напружень, які формально можуть бути отримані з рівнянь Нав'є-Стокса за допомогою процедури осереднення за часом аналогічно тому, як це робиться при виведенні рівнянь Рейнольдса. Проте ці рівняння містять так звані моменти третього порядку ( $\overline{u'_i u'_j u'_k}$ ). Їх зв'язок з параметрами осередненого руху і компонентами тензора рейнольдсових напружень (моментами другого порядку) є невідомий, і для їх визначення потрібне використання рівнянь перенесення для моментів третього порядку. Ці рівняння, у свою чергу, містять кореляції четвертого порядку і т. д., так що отримання строгої замкнутої системи рівнянь відносно статистичних характеристик турбулентності в принципі неможливе. У цій ситуації розумним компромісом видається обмеження моделювання рівняннями перенесення других моментів.

Надзвичайно проблематичним є питання, щодо значень кореляційних членів високих порядків. Ця емпірична інформація необхідна для замикання відповідних моделей турбулентності. Як відзначається в роботі [9], «обрив» описаного вище нескінченного «ланцюжка» на рівняннях перенесення других моментів неявно ґрунтується на тому, що не має теоретичних підтверджень про те, що із зростанням порядку модельованих кореляцій їх вплив на основні статистичні характеристики турбулентних потоків зменшується [10].

Певний час дослідники мали надію з розробки універсальної моделі турбулентності для замикання рівнянь RANS моделі. Проте проведені експериментальні та числові дослідження турбулентних течій розвіяли ці надії. Вони переконливо показали, що локальні осереднені характеристики турбулентних потоків піддаються істотному глобальному впливу стійких, великомасштабних, з розмірами порядку макро-масштабу течії, принципово тривимірних і нестационарних структур [2–9]. Характеристики цих структур залежать від конкретної геометрії даної течії та межових умов. Таким чином, гіпотеза локальності і осереднення характеристик турбулентних потоків, на якій в неявній формі будується RANS моделі турбулентності, не завжди виконується [2–9]. Це в принципі унеможливило побудову ідеальної моделі такого типу і робить згадані вище надії на можливість побудови універсальної RANS моделі турбулентності, по суті, нездійсненними [2, 3–5].

Дане ствердження в рівній мірі відноситься як до простих моделей, що базуються на гіпотезі Бусинеска про лінійний зв'язок між тензорами рейнольдсових напружень і швидкостей деформацій, так і до моделей перенесення рейнольдсових напружень [4].

Ознаки недосконалості напівемпіричних моделей турбулентності були виявлені з початком використання числових методів для розрахунку в'язких течій. При моделюванні відривних течій проявлялася їх неможливість урахувати певні фізичні характеристики. Необхідно було встановлювати межі використання тих чи інших напівемпіричних моделей турбулентності. Це сприяло розгортанню систематичних досліджень, спрямованих на визначення меж застосування напівемпіричних моделей турбулентності [1–10, 21–32].

Значна кількість публікацій, що присвячені удосконаленню відомих та створенню нових напівемпіричних моделей турбулентності підтверджували цілий ряд їх недоліків [3, 4]. Саме незадовільні результати числового моделювання з розрахунку відривних течій спричинили масу питань про їх коректність [3, 5, 21]. Багаточисельні дослідження сприяли розробці нових моделей турбулентності на основі використання RANS [2, 3, 5, 21]. Постало гостре питання про обґрунтований вибір тієї або іншої з них для розрахунку турбулентних течій.

Такі дослідження проводилися і продовжують проводитися, як окремими дослідницькими групами, так і у рамках масштабних міжнародних програм, координуваних NASA і Європейською комісією з розвитку наукових досліджень. Зокрема, NASA був створений спеціальний інтернет-портал, що постійно оновлюється [13]. На ньому приводяться формулювання найбільш поширених моделей турбулентності, «еталонні» результати розрахунків різних течій, отримані з їх використанням, і експериментальні дані, які можуть служити для валидації цих моделей [13]. Аналогічний ресурс був створений і підтримується «Європейською Спільнотою з Течій, Турбулентності і Горіння» (ERCOfTAC) [14]. На вирішення тієї ж проблеми з удосконалення і валидації моделей турбулентності спрямовано значне число міжнародних проектів, що фінансуються Євросоюзом та іншими організаціями: ECARP [15], FLOMANIA [16] і ATAAC [17].

Важливу роль в цій сфері відіграють спеціальні робочі семінари, на яких результати розрахунків, отримані окремими дослідницькими групами із застосуванням різних моделей турбулентності, порівнюються із спеціально відібраними експериментальними даними і з результатами розрахунків у рамках LES і DNS [10–17]. Цілеспрямовані зусилля наукових та проектних установ цілого ряду європейських країн сприяли накопичено важливої та, об'єктивної інформації про можливості різних моделей для використання рівнянь RANS [10–17].

Ця інформація є виключно важливою, оскільки, незважаючи на відмічені серйозні недоліки цих моделей, саме вони аж до теперішнього часу є, і ще довго залишатимуться основним робочим інструментом при проведенні практичних розрахунків турбулентних течій [2–6, 10–17]. Зростання технологічного рівня суспільства викликає потреби в розв'язуванні задач механіки рідини, газу та плазми, аеродинаміки транспортних апаратів та інших технічних пристроїв для багатьох галузей науки і техніки.

**Мета статті.** Числове моделювання в'язких турбулентних течій навколо транспортних апаратів, різноманітних технічних пристроїв та їх елементів є доволі складною проблемою. На сьогодні немає її універсальної математичної моделі, що будувалась би на основі об'єктивних фізичних законів, які б описували коректну поведінку динамічної системи [18–20].

---

Метою роботи є розгляд проблеми числового моделювання в'язких турбулентних течій навколо наземних транспортних апаратів, що рухаються над шляховою структурою. Для числового розв'язування поставленої задачі використовується гібридний підхід, вимогою до математичної моделі є адекватний опис властивостей системи з відповідним певним числом ступенів свободи. Така математична модель надасть можливість проводити подальші дослідження динамічних та аеродинамічних характеристик транспортних апаратів та їх складових.

**Виклад основного матеріалу.** Гібридні RANS – LES моделі з'явилися в кінці вісімдесятих на початку дев'яностих років двадцятого століття. Одним з найпоширеніших методів для практичного використання в аеродинаміці літальних апаратів, автомобілів, інших транспортних засобів став метод моделювання від'єднаних вихорів – Detached Eddy Simulation або DES.

На сьогодні, принаймні, поширені декілька десятків таких моделей. Їх подальшому удосконаленню і розвитку присвячено величезне число робіт [21]. Метод DES тримав і подальший розвиток – Delayed Detached Eddy Simulation (DDES) [21–25]. Це свідчить про позитивні сторони ідеї, що лежить в основі ряду гібридних моделей. Проте не має повної задоволеності вже існуючими моделями такого типу [2–6, 21–25].

Загальна концепція гібридних моделей турбулентних течій полягає в спробі побудови комбінованих моделей. Вони повинні функціонувати в одних областях течії як RANS, а в інших областях течії як LES. Формальна схожість рівнянь Рейнольдса (4) та рівнянь для LES надає певні переваги в чисельному розв'язуванні задачі. Найважливішою відмінністю різних форм гібридних моделей дозволяє реалізовувати шляхи числового розв'язування вихідних диференціальних різними методами.

Детальний огляд цих гібридних моделей представлено в цілому ряді наукових праць [17, 25–40, 45–47]. Проблеми розробки та удосконалення гібридних RANS – LES моделей постійно обговорюються на різноманітних міжнародних конференціях, симпозіумах і т.п. [2, 10–17].

Серед гібридних RANS – LES моделей широке розповсюдження отримав гібридний метод DES [31]. Необхідність розрахунків течій з великими відривними зонами, а також значні ресурсні вимоги до методу LES спонукали дослідників на розробку методу DES. Дослідження показали, що RANS моделі не дозволяють забезпечити коректний розрахунок таких течій [1–5].

LES метод вимагає залучення надмірно великих обчислювальних витрат, лівова частка яких пов'язана з розрахунком пристінної частини приєднаних примежових шарів, які містять енергонесучі вихори малих розмірів [22–29].

Все це сприяло створенню такої моделі, яка функціонувала б як RANS в області приєданого примежового шару і забезпечувала цілком прийнятну точність, і як LES у відривних областях потоку, де його використання не вимагає надмірно дрібних сіток [22–29]. Він отримав назву методу «моделювання від'єднаних вихорів», що підкреслює відмінність DES від LES. Це пояснюється тим, що у рамках DES «точно» розрізняються лише «від'єднані» вихори, які містяться у відривній зоні. Відносно дрібні вихори, що формуються у приєданому примежовому шарі, описуються звичайними напівемпіричними RANS моделями [5–18, 31].

Ще одна важлива особливість DES полягає в тому, що у рамках цього підходу у RANS і LES областях використовується одна і та ж «базова» фізична модель турбулентності, яка функціонує як RANS модель у середині пристінного примежового шару і як її підсітковий аналог далеко від твердих стінок [5, 23–29]. Межа поміж областями RANS і LES визначається в процесі розрахунку автоматично і залежить від кроків використовуваної обчислювальної сітки, від відстані від даної точки потоку до обтічної поверхні і, взагалі кажучи, від локальних параметрів потоку [1, 2, 5, 31].

Інтенсивний розвиток обчислювальної аеродинаміки сприяв появі цілого ряду гібридних DES методів [30–34]. У зв'язку з цим DES і інші аналогічні DES-подібні методи: Extra – Large Eddy Simulation або E-LES [34] і Limited Numerical Scales або LNS [36] часто не зовсім точно називають «незонними» («non-zonal») гібридними методами, щоб відрізнити їх від зонних гібридів, в яких RANS і LES області вибираються з тих або інших міркувань. До таких методів належить, наприклад, зонний DES (Zonal DES або ZDES), що розвивається в роботі [37]), а також ряд інших зонних підходів [5]. Цей метод має ряд переваг в порівнянні з DES, що полягають у більшій гнучкості. Проте його основний недолік полягає в необхідності апріорних уявлень про структуру течії, наприклад, про положення точки(лінії) відриву потоку [5].

Окрему групу гібридних RANS – LES методів представляють так звані моделі LES з пристінними моделюванням (Wall Modeled LES – WMLES), які можуть використовуватися для розрахунку не лише відривних, але і складних приєднаних турбулентних течій [38]. Ідея цих методів полягає у використанні RANS не в усьому пристінному примежовому шарі, як це робиться в DES, а тільки в його внутрішній області, тобто саме в тій області, на розрахунок якої доводяться основні обчислювальні витрати LES [39–40]. Проте спектр застосування WMLES є досить широким [39–40].

Останніми роками отримав розвиток ще один підхід до RANS-LES моделюванню турбулентності, що є найбільш загальною формою зонних методів і дістав назву вбудованого LES (Embedded LES), у рамках якої область LES може довільним чином розташовуватися усередині області RANS (рис. 1) [5, 41].

Це відкриває можливість використання обчислювального трудомісткого методу LES тільки в тих областях потоку, які не піддаються опису у рамках RANS, або в областях, для яких потрібно отримання

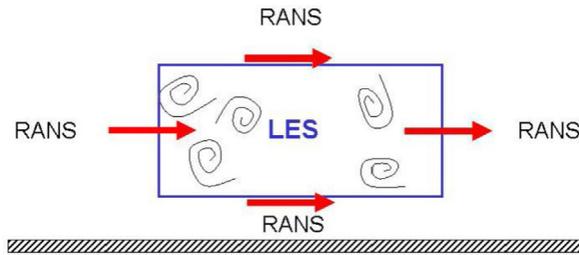


Рис. 1. Гібридний підхід для областей течії з застосування методів RANS та LES [5, 41]

інформації не лише про осереднені, але і про пульсаційні характеристики потоку [5, 39]. Така задача може виникнути при розв'язуванні зв'язаних задач аеродинаміки та пружності, акустики [5, 39]

Проте для їх практичної реалізації потрібні вирішення ряду складних фізичних проблем, пов'язаних з «зшиванням» RANS і LES розв'язків на межі областей. Так, при переході від LES до RANS розв'язування необхідне забезпечення плавного пригнічення турбулентних пульсацій [39].

В протилежність цьому, для досягнення швидкого переходу від повністю модельованої турбулентності в RANS області до «дозволеної» турбулентності в LES області на відповідних межах останньою необхідно вводити штучні збурення [17]. Незважаючи на значну кількість досліджень з моделювання турбулентних течій цілком задовільного рішення цих питань досі не знайдено [5, 17]. Окрім цього, програмна реалізація запропонованих методів є досить складною і істотним чином опирається на специфіку використовуваних обчислювальних сіток і структуру зберігання даних у відповідних обчислювальних кодах [17]. Це утрудняє, а іноді і унеможлиблює перенесення цих методів з одного коду в інший [5, 17].

На сьогодні розроблено ще так звані «безшовні» (seamless) RANS–LES гібриди, в яких обидва підходи тим або іншим чином «зважаються» і одночасно функціонують у всій розрахунковій області [43]. Найбільш відомим з них є метод, що базується на частково осереднених рівняннях Нав'є-Стокса, – Partially Averaged Navier-stokes або PANS [41]. Проте проблема коректного вибору вагових функцій, що автоматично забезпечують адекватні, у відповідності з локальним розміром сітки, ваги RANS і LES моделей в даній точці потоку залишається, по суті, невирішеною [41]. Це істотно обмежує практичне використання безшовних підходів RANS-LES.

Широкий досвід використання лінійних моделей свідчить про те, що і в наш час найбільш високий «рейтинг» серед них отримали дві моделі та їх модифікації [21, 31, 42–46] :

- модель перенесення турбулентної в'язкості [42, 45, 46] (модель Спаларта-Аллмараса або SA модель);
- модель перенесення кінетичної енергії турбулентності і питомої швидкості її дисипації [43, 44] ( $k-\omega$  Shear Stress Transport модель Ментера або SST модель).

Проте серед гібридних RANS-LES методів найбільш поширеним залишається гібридний метод DES та його пізніші модифікації [40–47].

Для розв'язування задачі, з визначення параметрів турбулентної течії навколо транспортного апарата, математична модель побудована на фізичних властивостях в'язкої стисливої рідини. Система рівнянь Нав'є-Стокса осереднена за Рейнольдсом для довільної криволінійної системи координат запишеться [2–5]

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial (\hat{E} - \hat{E}_v)}{\partial \xi} + \frac{\partial (\hat{F} - \hat{F}_v)}{\partial \eta} + \frac{\partial (\hat{G} - \hat{G}_v)}{\partial \zeta} = \hat{H}, \quad (6)$$

де  $\hat{Q}$  – вектор невідомих змінних;  $\hat{E}, \hat{F}, \hat{G}$  – вектори нев'язких потоків;  $\hat{E}_v = \xi_x E_v + \xi_y F_v + \xi_z G_v$ ,  $\hat{F}_v = \eta_x E_v + \eta_y F_v + \eta_z G_v$ ,  $\hat{G}_v = \zeta_x E_v + \zeta_y F_v + \zeta_z G_v$  – вектори в'язких потоків;  $\hat{H} = 1/j H$  – вектор джерельних членів.

В системі диференціальних рівнянь (6)  $n$  – компонентні вектори потоків  $\hat{Q}, \hat{E}_i, \hat{F}_i, \hat{G}_i, \hat{E}_v, \hat{F}_v, \hat{G}_v$  записуються в залежності від використовуваної моделі турбулентності.

Для розв'язування системи рівнянь (6) використано метод контрольного об'єму [2, 4–5]. Основні засади методу контрольного об'єму (МКО) полягають в тому, що розглядаються класичні рівняння балансу деякої величини  $Q$  в контрольному об'ємі  $V$ , обмеженому поверхнею  $S = \sum S_k$  з зовнішньою нормаллю  $\vec{n}$  [5]. Інтегруючи рівняння (6) по контрольному об'єму, отримаємо [5]:

$$\iiint_{\Delta V} \left[ \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial (\hat{E} - \hat{E}_v)}{\partial \xi} + \frac{\partial (\hat{F} - \hat{F}_v)}{\partial \eta} + \frac{\partial (\hat{G} - \hat{G}_v)}{\partial \zeta} - H \right] dV = 0. \quad (7)$$

Застосовуючи до рівняння (7) теорему про середнє і Остроградського-Гаусса, отримаємо [5]:

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta V} \iint_S \left[ (\hat{E} - \hat{E}_v) n_x + (\hat{F} - \hat{F}_v) n_y + (\hat{G} - \hat{G}_v) n_z \right] dS + \hat{H}, \quad (8)$$

де  $S$  – поверхня навколо контрольного об’єму  $\Delta V$ ;  $\vec{n}$  – вектор зовнішньої нормалі до поверхні  $S$ .  
Верхній знак  $[\sim]$  означає середнє значення шуканої функції за об’ємом:

$$\tilde{f} = \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} f dV. \quad (9)$$

Осереднені за Рейнольдсом рівнянь Нав’є-Стокса замкнено методом DES, що є подальшим розвитком моделі турбулентності Спаларта – Аллмараса в реалізації відокремлених вихорів [31, 45, 46]:

$$\frac{\partial(\rho\tilde{v})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\tilde{v}u_j) = E_t + F_t - G_t + T_t, \quad (10)$$

де  $E_t = \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho(v + \tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right) + C_{b2} \rho \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right]$  – дифузійний член, що задовольняє межовим умовам на стінці

$\tilde{v} = 0$ ;  $F_t = C_{b1}(1 - f_{t2})\rho\tilde{S}\tilde{v}$  – вираз, що описує виробництво турбулентності в області і підтримує опис течії

в ламінарному підшарі;  $G_t = C_{w1}f_w\rho\left(\frac{\tilde{v}}{d}\right)^2$  – вираз, що описує розпад турбулентності в ламінарному підшарі;

$T_t = f_{t1}\rho\Delta U^2 + f_{t2}\rho\frac{C_{b1}}{\kappa^2}\left(\frac{\tilde{v}}{d}\right)^2$  – вираз наближеного опису перехідного режиму з згладжувальними функціями  $f_{t1}$ ,  $f_{t2}$ , які забезпечують перехід від ламінарного до турбулентного режиму в пристінній області.

Вихорова в’язкість розраховується за співвідношенням:  $\mu_{nr} = \rho\tilde{v}f_{v1}$ . Модель відокремлених вихорів (DES) формується шляхом заміни змінної  $d$  на  $\tilde{d}$ , яка визначається за формулою [45]

$$\tilde{d} \equiv \min(d, C_{DES}\Delta),$$

де  $\Delta \equiv \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ ,  $C_{DES} = 0,65$  – стала моделі DES.

Для числового моделювання аеродинаміки наземного транспортного засобу, що рухається над шляховою структурою застосовано систему диференціальних рівнянь (6) замкнених моделлю турбулентності (9).

Для реалізації розробленої методики з розв’язування системи осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав’є-Стокса побудовано відповідні алгоритми та написано програмне забезпечення. Розроблений комплекс програмного забезпечення було протестовано на ряді класичних задач [5]. Результати розрахунків показали придатні результати для використання розробленого написано комплексу програмного забезпечення в біля екранній аеродинаміці

Тривимірна задача обтікання транспортного апарата, що рухається поблизу шляхової структури дозвуким потоком в’язкого газу є однією з складних задач аеродинаміки. На рис. 2. показано результати розрахунку параметрів течії навколо транспортного апарата з несучим корпусом поблизу шляхової структури дозвуким потоком:

- ізобари у площині XOY області течії;
- ізомахи у площині XOY області течії;
- ізолінії складової вектора швидкості  $v$  у площині XOZ області течії;
- ізолінії завихреності у площині XOY області течії.

Числове розв’язування таких задач дозволяє аналізувати структуру течії навколо транспортного апарата та її вплив на формування аеродинамічних характеристик. Отримані результати можна використовувати при пошуку шляхів покращення динамічних характеристик транспортних апаратів.

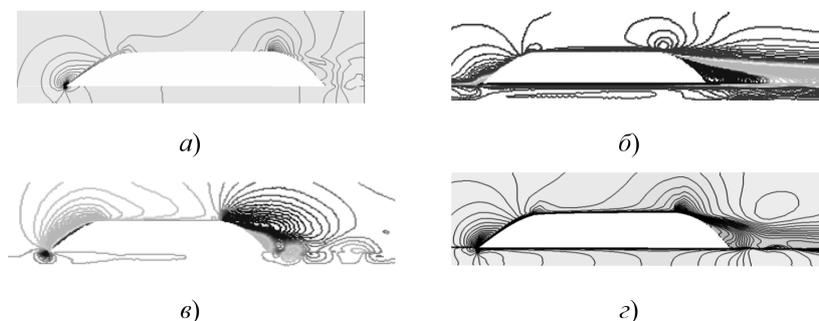


Рис. 2. Параметри турбулентної течії навколо транспортного апарата з несучим корпусом, що рухається над шляховою структурою:

$a$  – ізобари у площині XOY області течії;  $b$  – ізомахи у площині XOY області течії;  $v$  – ізолінії складової вектора швидкості  $V$  у площині XOZ області течії;  $z$  – ізолінії завихреності у площині XOY області течії

---

**Висновки та перспективи подальших досліджень.** Математичний та фізичний опис реальних аеродинамічних процесів, які описуються системами нелінійних диференціальних рівнянь, залишається невирішеним. Фізичні процеси в турбулентному русі рідини є надзвичайно складними. Значна кількість моделей її опису дозволяють розуміти окремі явища та властивості тільки частково. На сьогодні теорія турбулентності усе ще перебуває у стадії розробки й є ще далекою від свого завершення. Повний розрахунок реальних турбулентних течій поки що неможливий. На сьогодні головним інструментом розрахунку турбулентних течій залишаються числові методи.

Аналіз стану математичного моделювання турбулентних течій показує, що для їх практичного використання найбільш оптимальним методом є гібридні підходи типу DES. На найближчу перспективу ці методи є незамінними.

Динаміка розвитку електронно-обчислювальних машин, удосконалення експериментальних досліджень в гідроаеродинаміці та перспективні розробки нових методів розв'язування рівнянь математичної фізики дають надію на досягнення значних успіхів у числовому моделюванні реальних турбулентних течій навколо транспортних апаратів.

#### Список використаних джерел:

1. Shur M. L., Spalart P. R., Strelets M. Kh., Travin A. K. An enhanced version of DES with rapid transition from RANS to LES in separated flows. *Flow turbulence and combustion*. 2015. 95(4). P. 709–737.
2. Сохацький А. В. До питання числового моделювання аеродинаміки транспортних апаратів поблизу розділу середовищ. *Гідроаеромеханіка в інженерній практиці: матеріали XXVII міжнар. наук.-практ. конф.*, м. Київ, 14 червня 2023 р. Том 2 № 27. С. 55–58.
3. Приходько О. А., Сохацький А. В. Математичне та експериментальне моделювання аеродинаміки елементів транспортних систем поблизу екрану. Дніпропетровськ : Наука та освіта, 1998. 160 с.
4. Сохацький А. В. Теоретичні основи створення аеродинамічних компонентів перспективних швидкісних транспортних апаратів: дис. доктора технічних наук: 05.07.01. Дніпропетровськ, 2010. 364 с.
5. Сохацький А. В. До проблеми математичного моделювання турбулентних течій навколо транспортних апаратів. *Системи та технології*. 2021. № 2 (62). С. 5–36.
6. Reynolds O. On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion. *Phil. Trans. Roy. Soc.* 1895. P. 123–161.
7. Freund J. B., Moin P., Lele S. K. Compressibility effects in a turbulent annular mixing layer. *Flow Physics and Computation Division*. Technical Report TF-72. Stanford University. 1997.
8. Boersta B. I., Lele S. K. Large eddy simulation of compressible turbulent jets. Center for Turbulence Research. Stanford University. 1999. P.365–377.
9. Spalart P. R. Philosophies and fallacies in turbulence modeling. *Progress in Aerospace Sciences*. 2015. 74(1). P. 1–15
10. Hanjalić K., Launder B. Modelling Turbulence in Engineering and the Environment: Second-Moment Routes to Closure. Cambridge University Press, 2011. 402 p.
11. Spalart P. R., Shur M. L. On the sensitization of turbulence models to rotation and curvature. *Aerospace science and technology Journal*. 2015. Vol. 1, № 5. P. 297–366.
12. David C. Wilcox. Turbulence Modeling for CFD. [книга] 3rd ed. DCW, 2006. 522p.
13. «Turbulence modeling Resource. NASA Langley Research Center», (page curator and responsible official C. Rumsey). URL: <https://turbmodels.larc.nasa.gov/>
14. Haase W., Chaput E., Elsholz E., Leschziner M. A., Müller U. R. ECARP – European Computational Aerodynamics Research Project: Validation of CFD Codes and Assessment of Turbulence Models. *Notes on Numerical Fluid Mechanics*. 1997. v. 58. URL: [http://www.ercoftac.org/products\\_and\\_services/wiki/](http://www.ercoftac.org/products_and_services/wiki/)
15. Stephen B. P. Turbulent Flows. Cambridge University Press. 2000. 807p
16. Haase W., Aupoix B., Bunge U., Schwamborn D. FLOMANIA – A European Initiative on Flow Physics Modelling. *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. 2006. v.94 URL: <http://cfd.mace.manchester.ac.uk/flomania/>.
17. ATAAC: Advanced Turbulence Simulation for Aerodynamic Application Challenges. EU 7th Framework Programme Berlin. 2025. URL: <http://cfd.mace.manchester.ac.uk/twiki/bin/view/ATAAC>
18. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations. *The basic experiment*. Monthly Weather Review. 1963. 91, P. 99–164.
19. Deardorff J. A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*. 1970. N41(2). P. 453–480.
20. Grinstein F. F., Margolin L. G., Rider W. J. Implicit Large Eddy Simulation. Cambridge University Press. 2007. 577 p.
21. Shur M., Strelets M., Travin A. High-Order Implicit Multi-Block Navier-Stokes Code: Ten-Years Experience of Application to RANS/DES/LES/DNS of Turbulent Flows. *Invited lecture. 7th Symposium on Overset Composite Grids and Solution Technology*. October 5–7. 2004. Huntington Beach, USA. 2004.

- 
22. Spalart P. R., Shur M. L. On the sensitization of turbulence models to rotation and curvature. *Aerospace science and technology Journal*. 1997. Vol. 1. No 5. P. 297–366.
  23. Shur M. L., Spalart P. R., Strelets M. Kh., Travin A. K. Navier-Stokes simulation of shedding turbulent flow past a circular cylinder and a cylinder with a backward splitter plate. *Proceedings of the 3rd ECCOMAS CFD Conference*, Paris, France, 9–13 September 1996. Chichester: John Wiley & Sons, 1996. P. 676–682.
  24. Spalart P. R., Jou W. H., Strelets M. Kh., Allmaras S. R. Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach. *Proceedings of the 1-st AFOSR International Conference on DNS/LES*, Ruston, Louisiana, 4–8 August 1997. Louisiana Technical University. 1997. P. 137–148.
  25. Spalart P. R. Strategies for turbulence modelling and simulations. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2000. V. 21, No. 3. P. 252–263.
  26. You D., Moin P. A dynamic global-coefficient subgrid-scale eddy-viscosity model for large-eddy simulation in complex geometries. *Physics of Fluids*. 2007. 19(6), 065110.
  27. Sagaut P., Deck S., Terracol M. Multiscale and multiresolution approaches in turbulence. *Imperial College Press.*, 2006. 340 p
  28. Menter F. R., Schütze J., Gritskevich M. S. Global vs. Zonal Approaches in Hybrid RANS-LES Turbulence Modelling. Hybrid RANS-LES Modelling. *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. 2012. 117. pp. 15–28.
  29. Larsson J., Kawai S., Bodart J., Bermejo-Moreno I. Large eddy simulation with modeled wall-stress: recent progress and future directions. *Mechanical Engineering Reviews*. 2015. 00418.
  30. Peng S.-H., Haase W., (Eds.) Advances in Hybrid RANS-LES Modelling. *Papers Contributed to the 2007 Symposium on Hybrid RANS-LES Methods*. Corfu, Greece, 17–18 June 2007. *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. v. 97. 2008.
  31. Spalart P. R., Deck S., Shur M. L., Squires K. D., Strelets M. Kh., Travin A. K. A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. July 2006. P. 181–195.
  32. Peng S.-H., Doerffer P., Haase W., (Eds.) Progress in Hybrid RANS-LES Modelling. *Papers Contributed to the 3rd Symposium on Hybrid RANS-LES Methods*. Gdansk, Poland, June 2009. *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. v. 111. 2010.
  33. Fu S., Peng S.-H., Haase W., Schwamborn D. (Eds.) Progress in Hybrid RANS-LES Modelling. *Papers Contributed to the 4th Symposium on Hybrid RANS-LES Methods*. Beijing, China. September 2011. *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. v. 117. 2012.
  34. Girimaji S., Peng S.-H., Haase W., Schwamborn D. (Eds.) Progress in Hybrid RANS-LES Modelling. *Papers Contributed to the 5th Symposium on Hybrid RANS-LES Methods*. College Station, A&M University, Texas, USA, 19–21 March 2014. *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. v. 130, 2015.
  35. Kok J. C., Dol H. S., Oskam B., van der Ven H. Extra-large eddy simulation of massively separated flows, *AIAA Paper*. AIAA-2004-0264.
  36. Batten P., Goldberg U., Chakravarthy S. Sub-grid turbulence modeling for unsteady flow with acoustic resonance. *AIAA Paper*. AIAA-2000-0473.
  37. Deck S. Recent improvements in the Zonal Detached Eddy Simulation (ZDES) formulation. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. 2011. N26(6). P. 523–550.
  38. Piomelli U., Balaras E. Wall-Layer Models for Large-Eddy Simulations. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2002. 36(1), P. 505–374.
  39. Shur M. L., Spalart P. R., Strelets M. K., Travin A. K. A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modeled LES capabilities. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2008. 29. P. 1638–1649.
  40. Terzi D., Frohlich J. Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows. *Progress in Aerospace Sciences*. 2008, N44(5). P. 349–377.
  41. Girimaji S., Sreenivasan R., Jeong E., PANS Turbulence Model for Seamless Transition Between RANS, LES: Fixed-Point Analysis and Preliminary Results. FEDSM2003-45336. *Proceedings of ASME 222 FEDSM'03 2003 4th ASME-JSME Joint Fluids Engineering Conferences*. July 13-16. Honolulu, Hawaii USA. 2003
  42. Spalart P. R., Allmaras S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *AIAA Paper*. AIAA-1992-0439.
  43. Menter F. R. Zonal two-equation  $k-\omega$  turbulence models for aerodynamic flows. *AIAA Paper*. AIAA-1993-2906.
  44. Menter, F. R., Kuntz, M. and Langtry, R. Ten Year of Industrial Experience with the SST Turbulence Model. In: *Proceedings of the 4th International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer*. Begell House, Inc., Redding. 2003. p. 625–632.
  45. Spalart P. R., Jou W. H., Strelets M. L., Allmaras S. R. Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach. *Proceedings of first AFOSR international conference on DND/LES*. 1997.
  41. Spalart P. R. Strategies for turbulence modeling and simulations. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 2000, 21, pp. 252–263.
  42. Forsythe J., Squires K., Wurtzler K., Spalart P. Detached-eddy simulation of fighter aircraft at high alpha. *AIAA Paper*. AIAA-2002-0591.
-

---

43. Сохацький А. В. Деякі питання математичного моделювання турбулентних течій навколо транспортних апаратів та їх елементів. *Системи та технології*. 2025. № 1(69). С. 33–44.

#### References:

1. Shur, M. L., Spalart, P. R., Strelets, M. Kh., Travin, A. K. (2015). An enhanced version of DES with rapid transition from RANS to LES in separated flows. *Flow turbulence and combustion*. (4), 709–737.
2. Sokhatskyi, A. V. (2023). До питання числового моделювання аеродинаміки транспортних апаратів поблизу розділу середовищ. *Гідроаеромеханіка в інженерній практиці: матеріали XXVII міжнар. наук.-практ. конф.* (Tom 2, № 27, s.55–58). 14 червня Київ.
3. Prykhodko, O. A., Sokhatskyi, A. V. (1998). Математичне та експериментальне моделювання аеродинаміки елементів транспортних систем поблизу екрану. *Дніпропетровськ : Наука та освіта*.
4. Sokhatskyi, A. V. (2010). Теоретичні основи створення аеродинамічних компонентів перспективних швидкісних транспортних апаратів: дис. доктора технічних наук. Дніпропетровськ.
5. Sokhatskyi, A. V. (2021). До проблеми математичного моделювання турбулентних течій навколо транспортних апаратів. *Системи та технології*. (2), 5–36.
6. Reynolds, O. (1895). On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion. *Phil. Trans. Roy. Soc.* 123–161.
7. Freund, J. B., Moin, P., Lele, S. K. (1997). Compressibility effects in a turbulent annular mixing layer. *Flow Physics and Computation Division*. Technical Report TF-72. Stanford University.
8. Boersta, B. I., Lele, S. K. (1999) Large eddy simulation of compressible turbulent jets. Center for Turbulence Research. Stanford University. 365–377.
9. Spalart, P. R. (2015). Philosophies and fallacies in turbulence modeling. *Progress in Aerospace Sciences*. 74(1), 1–15.
10. Hanjalić, K., Launder, B. Modelling (2011). *Turbulence in Engineering and the Environment: Second-Moment Routes to Closure*. Cambridge University Press.
11. Spalart, P. R., Shur, M. L. (2015). On the sensitization of turbulence models to rotation and curvature. *Aerospace science and technology Journal*. Vol. 1, (5). P. 297–366.
12. Wilcox, D. C. (2006). *Turbulence Modeling for CFD*. 3rd ed. DCW.
13. Turbulence modeling Resource. (2025) NASA Langley Research Center», (page curator and responsible official C. Rumsey). Retrieved from: <https://turbmodels.larc.nasa.gov/>
14. Haase, W., Chaput, E., Elsholz, E., Leschziner, M. A., Müller, U. R. (1997). ECARP – European Computational Aerodynamics Research Project: Validation of CFD Codes and Assessment of Turbulence Models. *Notes on Numerical Fluid Mechanics*. (58). Retrieved from: [http://www.ercofac.org/products\\_and\\_services/wiki/](http://www.ercofac.org/products_and_services/wiki/)
15. Stephen, B. P. (2000), *Turbulent Flows*. Cambridge University Press.
16. Haase, W., Aupoix, B., Bunge, U., Schwamborn, D. (2006) FLOMANIA – A European Initiative on Flow Physics Modelling. *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. (94), Retrieved from: <http://cfm.mace.manchester.ac.uk/flomania/>
17. ATAAC: Advanced Turbulence Simulation for Aerodynamic Application Challenges. *EU 7th Framework Programme*. Berlin. 2025 Retrieved from: <http://cfm.mace.manchester.ac.uk/twiki/bin/view/ATAAC>.
18. Smagorinsky, J. (1963). General circulation experiments with the primitive equations. *The basic experiment*. Monthly Weather Review. (91), 99–164.
19. Deardorff, J. (1970). A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*. (2), 453–480.
20. Grinstein, F. F., Margolin, L. G., Rider, W. J. (2007). *Implicit Large Eddy Simulation*. Cambridge University Press.
21. Shur, M., Strelets, M., Travin, A. (2004). High-Order Implicit Multi-Block Navier-Stokes Code: Ten-Years Experience of Application to RANS/DES/LES/DNS of Turbulent Flows. *Invited lecture. 7th Symposium on Overset Composite Grids and Solution Technology*. October 5–7. 2004. Huntington Beach, USA.
22. Spalart, P. R., Shur M. L. (1997). On the sensitization of turbulence models to rotation and curvature. *Aerospace science and technology Journal*. Vol. 1, (5). P. 297–366.
23. Shur, M. L., Spalart, P. R., Strelets, M. Kh., Travin, A. K. Navier-Stokes simulation of shedding turbulent flow past a circular cylinder and a cylinder with a backward splitter plate. *Proceedings of the 3rd ECCOMAS CFD Conference*. (p. 676–682), Paris, France, 9-13 September 1996. Chichester: John Wiley & Sons.
24. Spalart, P. R., Jou, W. H., Strelets, M. Kh., Allmaras, S. R. (1997). Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach. *Proceedings of the 1-st AFOSR International Conference on DNS/LES*, (P. 137–148.) Ruston, Louisiana, 4–8 August. Louisiana Technical University.
25. Spalart, P. R. (2000). Strategies for turbulence modelling and simulations. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. V. 21, (3), P. 252–263.

- 
26. You, D., Moin, P. (2007). A dynamic global-coefficient subgrid-scale eddy-viscosity model for large-eddy simulation in complex geometries. *Physics of Fluids*. 19(6), 065110.
27. Sagaut, P., Deck, S., Terracol, M. (2006). Multiscale and multiresolution approaches in turbulence. *Imperial College Press*.
28. Menter, F. R., Schütze, J., Gritskevich, M. S. (2012). Global vs. Zonal Approaches in Hybrid RANS-LES Turbulence Modelling. Hybrid RANS-LES Modelling. *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. (117). 15–28.
29. Larsson, J., Kawai, S., Bodart, J., Bermejo-Moreno, I. (2015). Large eddy simulation with modeled wall-stress: recent progress and future directions. *Mechanical Engineering Reviews*. 00418.
30. Peng, S.-H., Haase, W., (Eds.) (2008). Advances in Hybrid RANS-LES Modelling. *Papers Contributed to the 2007 Symposium on Hybrid RANS-LES Methods*. Corfu, Greece, 17–18 June 2007. *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. v. 97.
31. Spalart, P. R., Deck, S., Shur, M. L., Squires, K. D., Strelets, M. Kh., Travin, A. K. (2006). A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. (7), 181–195.
32. Peng, S.-H., Doerffer, P., Haase, W., (Eds.) (2010). Progress in Hybrid RANS-LES Modelling. *Papers Contributed to the 3rd Symposium on Hybrid RANS-LES Methods*. Gdansk, Poland, June 2009. *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. v. 111.
33. Fu, S., Peng, S.-H., Haase, W., Schwamborn, D. (Eds.) (2012). Progress in Hybrid RANS-LES Modelling. *Papers Contributed to the 4th Symposium on Hybrid RANS-LES Methods*. Beijing, China. September 2011. *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. v. 117.
34. Girimaji, S., Peng, S.-H., Haase, W., Schwamborn, D. (Eds.) (2015). Progress in Hybrid RANS-LES Modelling. *Papers Contributed to the 5th Symposium on Hybrid RANS-LES Methods*. College Station, A&M University, Texas, USA, 19–21 March 2014. *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. v. 130.
35. Kok, J. C., Dol, H. S., Oskam, B., van der Ven, H. (2004). Extra-large eddy simulation of massively separated flows, *AIAA Paper*. AIAA-2004-0264.
36. Batten, P., Goldberg, U., Chakravarthy, S. (2000). Sub-grid turbulence modeling for unsteady flow with acoustic resonance. *AIAA Paper*. AIAA-2000-0473.
37. Deck S. (2011) Recent improvements in the Zonal Detached Eddy Simulation (ZDES) formulation. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. (6), 523–550.
38. Piomelli, U., Balaras, E. (2002). Wall-Layer Models for Large-Eddy Simulations. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 36(1), 505–374.
39. Shur, M. L., Spalart, P. R., Strelets, M. K., Travin, A. K. (2008). A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modeled LES capabilities. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. (29). 1638–1649.
40. Terzi, D., Frohlich, J. (2008) Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows. *Progress in Aerospace Sciences*. 44(5). 349–377.
41. Girimaji, S., Sreenivasan, R., Jeong, E., PANS Turbulence Model for Seamless Transition Between RANS, LES: Fixed-Point Analysis and Preliminary Results. FEDSM2003-45336. *Proceedings of ASME 222 FEDSM'03 2003 4th ASME-JSME Joint Fluids Engineering Conferences*. July 13–16. 2003. Honolulu, Hawaii USA.
42. Spalart, P. R., Allmaras, S. R. (1992). A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *AIAA Paper*. AIAA-1992-0439.
43. Menter, F. R. (1993). Zonal two-equation  $k-\omega$  turbulence models for aerodynamic flows. *AIAA Paper*. AIAA-1993-2906.
44. Menter, F. R., Kuntz, M. and Langtry, R. (2003). Ten Year of Industrial Experience with the SST Turbulence Model. In: *Proceedings of the 4th International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer*. (p. 625–632). Begell House, Inc., Redding.
45. Spalart, P. R., Jou, W. H., Strelets, M. L., Allmaras, S. R. Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach. *Proceedings of first AFOSR international conference on DND/LES*. 1997.
46. Spalart, P. R. (2000). Strategies for turbulence modeling and simulations. *Int. J. Heat Fluid Flow*, (21), 252–263.
47. Forsythe, J., Squires, K., Wurtzler, K., Spalart, P. (2002). Detached-eddy simulation of fighter aircraft at high alpha. *AIAA Paper*. AIAA-2002-0591.
48. Sokhatskyi, A. V. (2025). Deiaki pytannia matematychnoho modeliuvannia turbulentykh techii navkolo transportnykh aparativ ta yikh elementiv. *Systemy ta tekhnolohii*. (1), 33–44.

Дата надходження статті: 03.12.2025

Дата прийняття статті до друку після рецензування: 22.12.2025

Дата публікації (оприлюднення) статті 27.01.2026