

Марчук А. Р., кандидат технічних наук,
доцент кафедри математики та інформаційних технологій
Університету економіки і підприємництва
ORCID: 0000-0002-3726-2878

Ярецька Н. О., кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики та інформаційних технологій
Університету економіки і підприємництва
ORCID: 0000-0002-3726-2878

ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ЯК ІНСТРУМЕНТУ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ: ДОСВІД УПРОВАДЖЕННЯ GEOGEBRA У ОСВІТУ МАЙБУТНІХ ІНЖЕНЕРІВ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

У сучасній технічній освіті динамічні комп'ютерні середовища відіграють ключову роль у поєднанні теоретичних математичних моделей з їх практичним застосуванням. В статті показано досвід системного використання середовища GeoGebra при викладанні розділу «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» дисципліни «Вища та прикладна математика» майбутнім інженерам програмного забезпечення. На основі огляду наукових джерел та проведеного експерименту доведено, що візуалізація абстрактних понять лінійної алгебри та аналітичної геометрії істотно підсилює розуміння матеріалу здобувачами вищої освіти вказаної спеціальності. Описано підхід, який застосовується у нашому закладі – Університеті економіки і підприємництва – де GeoGebra інтегроване для проведення практичних занять та самостійної роботи здобувачів вищої та перед вищої освіти.

Було проведено навчальний експеримент із двома групами: експериментальна (група з 8 студентів) – працювала з GeoGebra-аплетами, контрольна (група з 12 студентів) – працювала за класичною методикою подання матеріалу дисципліни. Порівняльний аналіз результатів тестування і анкетування доводить, що здобувачі вищої освіти з експериментальної групи не лише покращили свої результати та знання, а й продемонстрували глибше розуміння геометричної інтерпретації векторних операцій, матричних перетворень та розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Візуальна інтерпретація та приклади сприяли формуванню інстинктивного бачення структури лінійних моделей, що використовуються в інженерії програмного забезпечення.

Отримані результати експерименту підтверджують високу ефективність динамічного комп'ютерного середовища GeoGebra як інструмента швидкої та наочної демонстрації, що значно підвищує рівень мотивації студентів технічних спеціальностей. Використання GeoGebra дозволяє здобувачам вищої освіти не просто бачити результат, а інтерактивно досліджувати його, змінюючи параметри моделі.

У статті також представлені практичні рекомендації щодо подальшого масштабування підходу використання GeoGebra – від створення авторських аплетів до впровадження проектно-орієнтованих завдань.

Ключові слова: GeoGebra, лінійна алгебра, вища та прикладна математика, технічна освіта, динамічна візуалізація, цифрові інструменти, інженерія програмного забезпечення.

Marchuk A. R., Yaretska N. O. Visualization of linear algebra as a tool of applied mathematics: experience of implementing geogebra in the education of future software engineers

In modern technical education, dynamic computer environments play a key role in combining theoretical mathematical models with their practical application. The article shows the experience of systematic use of the GeoGebra environment in teaching the section "Linear Algebra and Analytical Geometry" of the discipline "Higher and Applied Mathematics" to future software engineers. Based on a review of scientific sources and an experiment, it is proven that visualization of abstract concepts of linear algebra and analytical geometry significantly enhances the understanding of the material by higher education students of the specified specialty. The approach used in our institution – the University of Economics and Entrepreneurship – where GeoGebra is integrated for conducting practical classes and independent work of higher and pre-higher education students is described.

An educational experiment was conducted with two groups: experimental (group of 8 students) – worked with GeoGebra applets, control (group of 12 students) – worked according to the classical method of presenting the material of the discipline. A comparative analysis of the results of testing and questionnaires proves that higher education students from the experimental group not only improved their results and knowledge, but also demonstrated a deeper understanding of the geometric interpretation of vector operations, matrix transformations, and solving systems of linear algebraic equations. Visual interpretation and examples contributed to the formation of an instinctive vision of the structure of linear models used in software engineering.



The obtained experimental results confirm the high efficiency of the dynamic computer environment GeoGebra as a tool for quick and visual demonstration, which significantly increases the level of motivation of students of technical specialties. Using GeoGebra allows higher education students not only to see the result, but also to explore it interactively by changing the parameters of the model.

The article also presents practical recommendations for further scaling the approach to using GeoGebra – from creating author's applets to implementing project-oriented tasks.

Key words: GeoGebra, linear algebra, higher and applied mathematics, technical education, dynamic visualization, digital tools, software engineering.

Постановка проблеми. Підготовка інженерних кадрів в сучасному світі вимагає не лише ґрунтовних теоретичних знань, а й здатності працювати з абстрактними математичними структурами. Одним із найбільш проблемних курсів для студентів залишається лінійна алгебра та аналітична геометрія – її теорії часто сприймаються як відірвані від реальності. Для студентів часто залишається незрозумілим зміст її основних понять, зокрема векторів, матриць і систем лінійних алгебраїчних рівнянь [1–4]. Причиною є суттєвий розрив між алгебраїчною формою викладу та геометричним змістом математичних об'єктів.

Використання інтерактивних математичних середовищ, таких як GeoGebra, дозволяє істотно скоротити цю дистанцію і показати наочно ці поняття [1–8]. Саме візуальні моделі роблять абстрактні елементи – вектори, системи рівнянь, матриці, перетворення – наочно зрозумілими, що сприяє швидкому засвоєнню матеріалу і покращує інтерес до дисципліни [1–3]. Попередні українські та міжнародні дослідження [1, 3, 4, 9] демонструють позитивний вплив таких засобів на якість засвоєння матеріалу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У більшості сучасних науково-методичних праць наголошується, що GeoGebra [8] ефективно підтримує навчання лінійної алгебри та аналітичної геометрії завдяки здатності динамічно відображати математичні об'єкти. У роботі [2] показано, що адаптовані аплети GeoGebra дозволяють будувати та досліджувати просторові й плоскі криві, а також виконувати дії над матрицями, включно з пошуком обернених матриць [8], хоча для продуктивної роботи потрібні цифрова грамотність та стабільний інтернет в користувачів.

Аналіз зарубіжних досліджень, таких як [8, 7], засвідчують суттєве статистичне зростання успішності студентів, які працювали з графічними моделями. У праці [8] відзначено, що студенти «захоплено сприйняли геометричні представлення» і що статистичний аналіз підтвердив покращення їхніх результатів після впровадження GeoGebra [9].

В українських працях останніх років [1–4, 9], зокрема у [9], було встановлено «позитивну динаміку результатів вивчення студентами» курсу лінійної алгебри та аналітичної геометрії при використанні комп'ютерних програм таких як MS Excel, MathCAD, Matlab і GeoGebra та інших [3, 9]. Було відзначено, що візуалізація абстрактних теорій цією системою прискорює розв'язання задач і підвищує інтерес до дисципліни [9]. Аналогічно, інші дослідники підкреслюють [1, 3, 8], що навчальні програми на базі GeoGebra активізують дослідницьку і творчу діяльність студентів, сприяють інтеграції різних видів навчальної активності (навчальної, пошукової, проектної) і дозволяють адаптувати виклад під індивідуальний рівень студентів. Зокрема, у дослідженні [1] виділено, що викладання математики на основі середовища GeoGebra «сприяє підвищенню якості підготовки... застосуванню активних прийомів та методів, зростанню творчої активності студентів» [1].

Таким чином, наукова спільнота практично одноставно підтверджує високу ефективність цифрових середовищ для розуміння абстрактних понять і теорій лінійної алгебри.

Мета статті. Метою проведення дослідження є:

- 1) аналіз можливостей та доцільність використання середовища GeoGebra у візуалізації об'єктів лінійної алгебри та аналітичної геометрії для покращення знань студентів технічних спеціальностей;
- 2) оцінити ефективність інтеграції інструмента GeoGebra у навчальний процес за результатами навчання;
- 3) провести загальний огляд літератури щодо використання GeoGebra у математичній освіті;
- 4) показати впровадження GeoGebra у практичні заняття Університету економіки і підприємництва на прикладі курсу «Вища та прикладна математика»;
- 5) описати й проінтерпретувати результати навчального експерименту;
- 6) навести приклади конкретних GeoGebra-конструкцій;
- 7) сформулювати висновки та практичні рекомендації для викладачів ЗВО та коледжів.

Методика впровадження GeoGebra у Хмельницькому університеті економіки і підприємництва.

В університеті економіки і підприємництва середовище GeoGebra інтегровано у практичні заняття з курсу «Вища та прикладна математика». Методика включає:

- попередню підготовку аплетів, які відповідають кожному завданню заняття;
- самостійну роботу студентів на занятті – побудова моделей, перевірка алгебраїчних обчислень за допомогою графічних інструментів;
- обговорення результатів у групах, що сприяє розвиткові математичного мислення та рефлексії.

Теми обраних аплетів охоплюють, зокрема, наступні завдання:

- Побудова двох ліній та аналіз кількості розв'язків системи.
- Побудова площин з подальшим аналізом.
- Побудова кривих і поверхонь другого порядку з можливими змінами їх параметрів.
- Візуалізація векторів і лінійних комбінацій у 3D.
- Демонстрація впливу матричного перетворення на базисні вектори.

Такий підхід дозволяє студентам не просто бачити результат, а інтерактивно досліджувати його, змінюючи параметри моделі.

Навчальний експеримент та його результати. Для оцінювання ефективності методики проведено експеримент із двома групами:

– Експериментальна група ($N = 8$ студентів першого курсу спеціальності «Інженерія програмного забезпечення») – навчалася з використанням GeoGebra на практичних заняттях з дисципліни «Вища та прикладна математика»;

– Контрольна група ($N = 12$) – працювала за традиційною схемою (вправи з підручників і лекційні пояснення).

При цьому обидві групи прослухали один і той самий лекційний курс.

Порівняння результатів тестування в кінці семестру показало, що:

- експериментальна група підвищила результат із 62 % до 74 % (приріст 12 %);
- контрольна показала приріст лише на 6 % (61 % → 67 %).

Анкетування здобувачів освіти засвідчило, що:

– 85 % студентів експериментальної групи відзначили GeoGebra як «ключовий інструмент для розуміння»,

– 90 % – як «фактор підвищення інтересу до предмета».

Графічні моделі (рис. 1–4) допомогли студентам: інтуїтивно осмислити перетини ліній; дослідити системи рівнянь різної природи; аналізувати поведінку кривих другого порядку; розвинути просторову уяву.

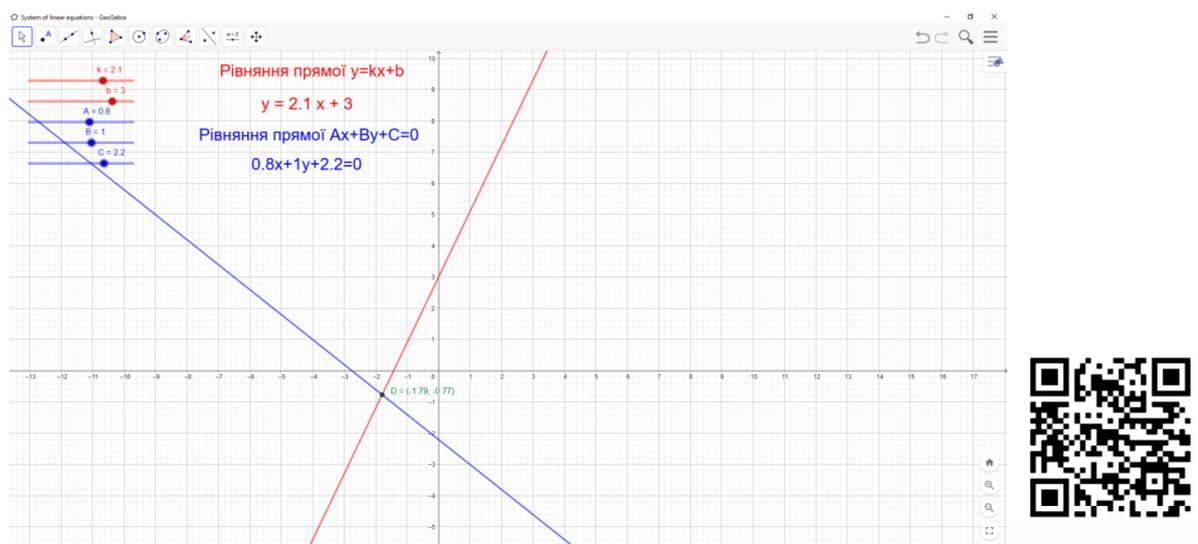


Рис. 1. Графічне рішення системи двох лінійних рівнянь в GeoGebra: дві прямі перетинаються у точці, що є розв'язком системи

<https://www.geogebra.org/classic/yuepeuqn>

Під час виконання завдань з системами рівнянь студенти отримували готові геометричні побудови в GeoGebra. Наприклад, на рис. 1 показано типове завдання: побудовано графіки двох ліній (синя і червона) і знайдено їх точку перетину (зелена крапка). Студенти відкрито висловлювали, що такого роду наочність допомагає їм візуально впевнитися в правильності алгебраїчних обчислень. Цей експеримент підтверджується висновками зробленими в [1] про те, що такий підхід «позитивно позначається на успішності студентів» і викликає «пізнавальний інтерес до точних наук» [1].

GeoGebra дозволяє також моделювати зображення системи трьох лінійних рівнянь. На рис. 2 зображено випадок, коли система рівнянь складається з цих трьох рівнянь. Використовуючи програму ми можемо коригувати положення повзунків, які задають коефіцієнти в системах рівнянь. При цьому ми одразу бачимо розв'язок у вигляді координат точки, що дає можливість перевірити свої розрахунки, зроблені методами лінійної алгебри. Студенти відзначають, що лише графічне подання таких задач допомагає їм зорієнтуватися у розв'язках і уникнути арифметичних помилок.

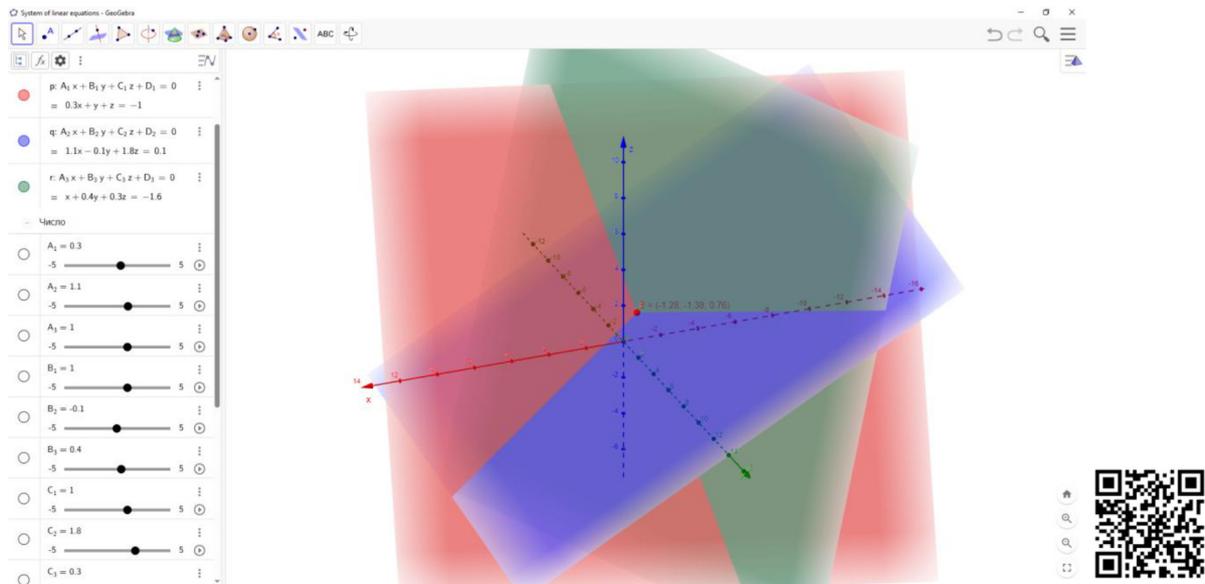


Рис. 2. Графічне рішення системи трьох лінійних рівнянь в GeoGebra: візуалізація в 3D за допомогою площин <https://www.geogebra.org/classic/xgygepyx>

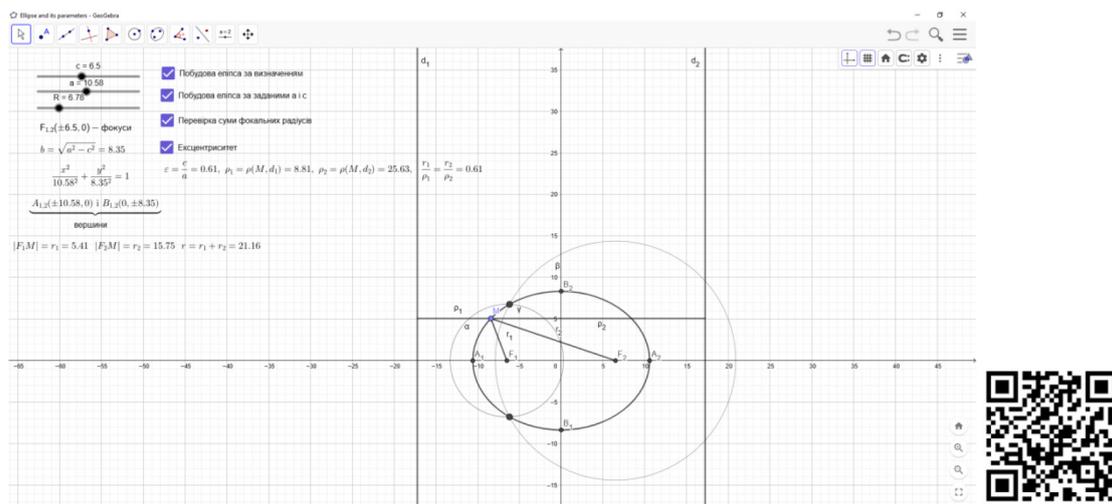


Рис. 3. Дослідження еліпса в залежності від його параметрів в GeoGebra <https://www.geogebra.org/classic/qyubujgv>

На рис. 3 показано одну з типових кривих аналітичної геометрії – еліпс. Завдяки цій розробці ми можемо коригувати положення повзунків, які задають різні параметри еліпса. Також ми можемо перевірити усі наші розрахунки наочно з отриманого рисунка. Така динамічна модель допомагає студентам глибше зрозуміти властивості кривих другого порядку, які вивчаються в курсі вищої та прикладної математики.

На рис. 4 показано розв’язок нетипової задачі аналітичної геометрії, а саме перетину еліпсоїда і прямої. Змінюючи параметри еліпса і прямої ми одразу ж можемо спостерігати їх графічне відображення, а точки показують їх перетин. Крім того ми одразу бачимо результат обрахунку відстані між цими точками, що допомагає підтвердити числові розрахунки виконані студентами. Зокрема, для того, щоб зобразити ці дослідження за допомогою класичних методів, немає можливості, а GeoGebra дозволяє це зробити з можливістю демонстрації кожному студенту на його смартфоні.

Висновки. Результати дослідження свідчать, що використання середовища GeoGebra у викладанні вищої та прикладної математики має чітко виражений позитивний ефект.

А інтерактивна візуалізація:

- підсилює розуміння алгебраїчних операцій;
- допомагає студентам побачити геометричний сенс моделей;
- стимулює інтерес і формує дослідницькі навички.

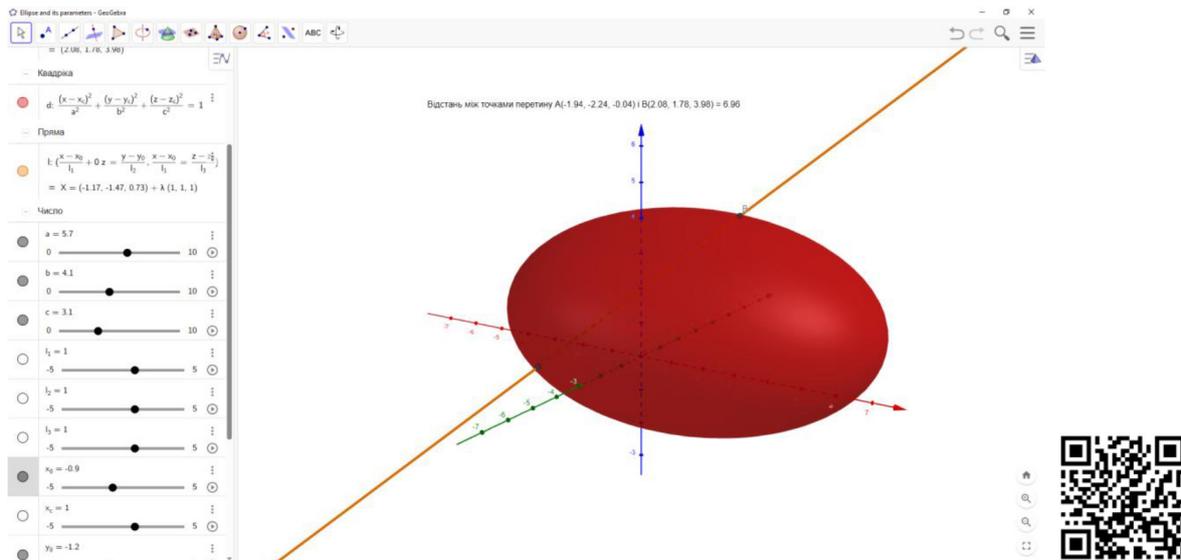


Рис. 4. Графічне розв'язання системи рівнянь перетину еліпсоїда і прямої

<https://www.geogebra.org/classic/kefczwar>

На основі отриманих результатів рекомендуємо наступні напрями подальшого впровадження:

1. Розробка власних наборів GeoGebra-аплетів для специфічних тем університетів і коледжів, що дозволить врахувати потреби програми та створити адаптивні вправи.
2. Використання GeoGebra для групових проєктів: наприклад, студенти можуть спільно моделювати прикладні задачі (проєктування оптичних систем, 3D-моделювання силових полів тощо) з використанням тем вищої та прикладної математики.
3. Інтеграція результатів експерименту у систему дистанційного навчання університету, щоб студенти мали постійний доступ до інструментів GeoGebra як під час аудиторних, так і самостійних занять.
4. Підготовка посібника або електронного підручника з вищої та прикладної математики з використанням GeoGebra, який міститиме приклади побудов, завдання й методичні рекомендації для викладачів. GeoGebra має потенціал стати основою сучасної методики викладання вищої та прикладної математики та важливим елементом підготовки майбутніх інженерів.

Список використаних джерел:

1. Гусак Л. П., Радзіховська Л. М., Гринчук Т. П. Використання середовища GeoGebra в математичній підготовці студентів економічних спеціальностей. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методи навчання*. 2023. Вип. 70. С. 24–29.
2. Дубовик В., Рудницький С. Візуалізація навчального матеріалу у процесі підготовки майбутніх учителів математики засобами середовища GeoGebra. *Фізико-математична освіта*. 2022. Т. 34, № 2. С. 33–40.
3. Ярецька Н. О., Рамський А. О., Поплавська О. А. Особливості викладання вищої математики студентам галузі знань «Інформаційні технології» в умовах цифровізації освіти». *Вчені записки Таврійського національного університету імені В.І. Вернадського. Серія: Технічні науки*. 2025. Т. 36 (75) № 3. С. 457–463. DOI <https://doi.org/10.32782/2663-5941/2025.3.2/60>
4. Потапова О. М., Олексенко В. М., Петрина Я. Д. Сучасні підходи до викладання математичних дисциплін у вищій школі. *Інноваційна педагогіка*. 2025. Вип. 79, Т. 2. С. 154–160. DOI: <https://doi.org/10.32782/2663-6085/2025/79.2.30>
5. Геревенко А. М., Ільїна Т. В., Ібрагімова Л. А. Використання цифрових платформ для підвищення якості професійної освіти. *Академічні візії*. 2024. № 31. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.11442893>
6. Чорна І., Мельничук Л., Татарин О. Використання інтерактивних технологій в освітньому процесі під час викладання природничо-математичних дисциплін. *Молодий Вчений*. 2022. № 6(106). С. 61–64. URL: <https://doi.org/10.32839/2304-5809/2022-6-106-13>
7. Bobro N. The use of artificial intelligence in the organization of the educational process in a digital educational environment. *Social Science and Humanities Journal*. 2024. № 08 (02). P:34586-34589. DOI: 10.18535/sshj.v8i03.945
8. Havelková V. Geogebra in teaching linear algebra. *Proceedings of the European Conference on E-Learning (ECEL)*. 2013. P. 581–589.
9. Гусак Л. П., Радзіховська Л. М. Використання комп'ютерних програм під час викладання курсу «Лінійна алгебра та аналітична геометрія». *Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво*. 2024. Вип. 56. С. 149–156.

References:

1. Husak, L. P., Radzikhovska, L. M., Hrynychuk, T. P. (2023). Vykorystannia seredovyshcha GeoGebra v matematychnii pidhotovtsi studentiv ekonomichnykh spetsialnosti [Using the GeoGebra environment in mathematical training of students of economic specialties]. *Suchasni informatsiini tekhnologii ta innovatsiini metodyky navchannia*. Vyp. 70. S. 24–29. [in Ukrainian].
2. Dubovyk, V., Rudnytskyi, S. (2022). Vizualizatsiia navchalnoho materialu u protsesi pidhotovky maibutnikh uchyteliv matematyky zasobamy seredovyshcha GeoGebra [Visualization of educational material in the process of training future mathematics teachers using the GeoGebra environment]. *Fyzyko-matematychna osvita*. T. 34, № 2. S. 33–40. [in Ukrainian].
3. Yaretska, N. O., Ramskyi, A. O., Poplavska, O. A. (2025). Osoblyvosti vykladannia vyshchoi matematyky studentam haluzi znan “Informatsiini tekhnologii” v umovakh tsyfrovizatsii osvity” [Peculiarities of teaching higher mathematics to students of the field of knowledge “Information Technologies” in the conditions of digitalization of education”]. *Vcheni zapysky Tavriiskoho natsionalnoho universytetu imeni V.I. Vernadskoho. Serii: Tekhnichni nauky*. T. 36 (75) № 3. S. 457–463. DOI <https://doi.org/10.32782/2663-5941/2025.3.2/60> [in Ukrainian].
4. Potapova, O. M., Oleksenko, V. M., Petryna, Ya. D. (2025). Suchasni pidkhody do vykladannia matematychnykh dystsyplin u vyshchii shkoli [Modern approaches to teaching mathematical disciplines in higher education]. *Innovatsiinapedahohika*. Vyp. 79, T. 2. S. 154–160. DOI: <https://doi.org/10.32782/2663-6085/2025/79.2.30> [in Ukrainian].
5. Herevenko, A. M., Ilina, T. V., Ibrahimova, L. A. (2024). Vykorystannia tsyfrovyykh platform dlia pidvyshchennia yakosti profesiinoi osvity [Using digital platforms to improve the quality of vocational education]. *Akademichni vizii*. № 31. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.11442893> [in Ukrainian].
6. Chorna, I., Melnychuk, L., Tataryn, O. (2022). Vykorystannia interaktyvnykh tekhnologii v osvitnomu protsesi pid chas vykladannia pryrodnycho-matematychnykh dystsyplin [The use of interactive technologies in the educational process when teaching natural and mathematical disciplines]. *Molodyi Vchenyi*. № 6(106). S. 61–64. <https://doi.org/10.32839/2304-5809/2022-6-106-13> [in Ukrainian].
7. Bobro, N. (2024). The use of artificial intelligence in the organization of the educational process in a digital educational environment. *Social Science and Humanities Journal*. № 08 (02). P. 34586–34589. DOI: 10.18535/sshj.v8i03.945
8. Havelková, V. (2013). Geogebra in teaching linear algebra. *Proceedings of the European Conference on E-Learning (ECEL)*. P. 581–589.
9. Husak, L. P., Radzikhovska, L. M. (2024). Vykorystannia kompiuternykh prohram pid chas vykladannia kursu “Liniina alhebra ta analitychna heometriia”. [Using computer programs when teaching the course “Linear Algebra and Analytic Geometry”]. *Kompiuterno-intehrovani tekhnologii: osvita, nauka, vyrobnytstvo*. Vyp. 56. S. 149–156. [in Ukrainian].

Дата першого надходження статті до видання: 24.11.2025

Дата прийняття статті до друку після рецензування: 22.12.2025

Дата публікації (оприлюднення) статті 27.01.2026