

Поляков В. О., кандидат технічних наук,
старший науковий співробітник відділу динаміки та міцності нових
видів транспорту Інституту транспортних систем і технологій
Національної академії наук України
ORCID: 0000-0002-4957-8028

Пославський С. Ю., кандидат технічних наук,
старший науковий співробітник відділу динаміки та міцності нових
видів транспорту Інституту транспортних систем і технологій
Національної академії наук України
ORCID: 0009-0007-8972-5823

РОЗРОБКА АЛГОРИТМУ ПОБУДОВИ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ ВАГОНА МАГЛЕВ ПОЇЗДА

Основними вимогами до моделі системної динаміки є: актуальність, результативність, достовірність, економічність, системність, оглядність, інформаційність. Найбільшою мірою таким вимогам відповідають моделі, які отримують тензорними методами.

Характер задач, при вирішенні яких передбачається використовувати методику, що розробляється, а також структури їх об'єктів дослідження свідчать про те, що в якості їхніх розрахункових схем можуть бути прийняті агрегати механічних і електромагнітних інерційних елементів, які взаємодіють через елементи податливості.

У якості мети дослідження було обрано подальший розвиток методики тензорного моделювання рухів маглев поїздів, на прикладі їхнього вагона, з урахуванням наявності у ньому детермінуючих руху – механічних і електромагнітних – елементів.

До об'єднання в агрегат, що приймається як розрахункова схема об'єкта розгляду, опорні елементи цієї схеми нічим не з'єднані, їх рухи нічим не обмежені. Після сполучення, на рухи елементів накладаються обмеження, які відображаються рівняннями зв'язів. Структура агрегату описується його структурною матрицею. Розрахункова схема вагона є агрегатом ідеальних інерційних елементів, з'єднаних згідно зі структурною матрицею.

Рухи як відокремленого опорного тіла, та і їх несполученого конгломерату описуються тензорними рівняннями. Для урахування структури розрахункової схеми, рівняння, що описують рухи незв'язаної сукупності опорних тіл, згортаються зі структурною матрицею агрегату. Результуюча модель динаміки вагона – також тензорна і може бути легко перетворена до іншої структури сполучення шляхом згортки з матрицею переходу від попередньої структури сполучення опорних тіл до наступної.

Основою побудови моделі руху вагона є рівняння, що описують динаміку опорних тіл, а також структурна матриця агрегату, яка відображає його структуру. Така модель відповідає вимогам холистичного врахування як параметричної, так і структурної організації об'єкта, що розглядається. Розроблювана методика її побудови може з успіхом використовуватися під час досліджень зазначеного типу поїздів.

Ключові слова: маглев поїзд, модель руху, розрахункова схема, опорне тіло, структурна матриця, тензорні методи, згортка.

Polyakov V. O., Poslavsky S. Yu. Development of a maglev train's carriage's dynamic's model constructing algorithm

The main requirements for a system dynamics model are: relevance, effectiveness, reliability, cost-effectiveness, systematicity, accessibility for review, and informativeness. To the greatest extent, models obtained using tensor methods meet these requirements.

The nature of the problems, in the solution of which it is planned to use the developed methodology, as well as the structure of their object of study, indicate that an aggregate of mechanical and electromagnetic inertial elements that interact through flexible ones can be adopted as its calculation scheme.

The aim of the research was to further develop the method of maglev train's motion's tensor modeling using the example of its carriage, taking into account the presence of mechanical and electromagnetic elements which determine its movement.

Before being combined into an aggregate, which is accepted as the design scheme of the object under consideration, the supporting elements of this scheme are not connected in any way, their movements are not restricted in any way. After coupling, constraints are imposed on the movements of the elements, which are reflected by the bond equations. The structure of an aggregate is described by its structural matrix. The design scheme of the carriage is an aggregate of ideal inertial elements connected according to a structural matrix.

© В. О. Поляков, С. Ю. Пославський, 2025

Стаття поширюється на умовах ліцензії CC BY 4.0

The motions of both a separate support body and their non-conjugated conglomerate are described by tensor equations. To take into account the structure of a wagon's calculation scheme, the equations describing the movements of an unconnected set of support bodies are convoluted with the structural matrix of the unit. The resulting carriage's dynamics model is also tensor and can be easily converted to another coupling structure by convolution with the transition matrix from the previous support body coupling structure to the next.

The basis for building a carriage's motion model is the equations describing the dynamics of the supporting bodies, as well as the structural matrix of the unit, which reflects its structure. Such a model meets the requirements of holistic consideration of both the parametric and structural organization of the object under consideration. The developed methodology for its construction can be successfully used when researching such trains dynamics.

Key words: maglev train, motion model, calculation scheme, support body, structural matrix, tensor methods, convolution.

Постановка проблеми. Маглев поїзда, в порівнянні з багатьма іншими видами транспорту, мають безліч переваг: висока швидкість пасажирських і вантажних перевезень, безконтактність рушіїв, високі економічність і керованість двигунів, екологічність, безпека, досить швидка окупність капітальних витрат і низькі витрати експлуатаційні. У той же час, побудова бажаних керованих рухів цих поїздів у різних їх експлуатаційних режимах – проблема вельми не тривіальна. Побудова кожного з таких рухів у своїй основі, безумовно, має модель динаміки не керованої – природної. Тому актуальність розробки та подальшого розвитку алгоритмів побудови моделей, у тому числі, природної динаміки маглев поїздів та їх елементів з часом все підвищується.

Аналіз рівня дослідженості проблеми. Рух маглев поїздів, як складних динамічних систем, піддається багатосторонньому дослідженню [1-6]. Проте, зазвичай, такі дослідження мають або експериментальний, або імітаційний характер. Дослідження ж аналітичного та чисельного характеру для таких систем або не проводяться зовсім, або опис результатів таких досліджень не наводиться у відкритій пресі. У роботах [7, 8] було наведено абрисний опис парадигми тензорного моделювання динаміки системи, що розглядається, але лише з урахуванням в ній механічних елементів і без повного опису елементів розробленої методики моделювання.

Метою дослідження є подальший розвиток методики тензорного моделювання рухів маглев поїзда, на прикладі його вагона, з урахуванням наявності в ньому основних – механічних та електромагнітних – елементів.

Виклад основного матеріалу дослідження. Основними вимогами до моделі системної динаміки є: актуальність, результативність, достовірність, економічність, системність, доступність для огляду, інформаційність [7]. Найбільшою мірою таким вимогам відповідають моделі, які отримують тензорними методами [9].

Урахування характеру задач, при вирішенні яких передбачається використовувати методику, що розробляється, а також структури їхнього об'єкта дослідження призводить до висновку про те, що в якості його розрахункової схеми може бути прийнятий агрегат механічних і електромагнітних інерційних елементів, що взаємодіють через елементи податливі. Ступінь глобальності цих елементів залежить від цілей та умов дослідження і обмежена лише тим, що агрегування можливе аж до імітації усієї системи одним елементом, а декомпозиція – до рівня фізичних фреймів. Під останніми будемо розуміти функціональні елементи, кожен з яких необхідний і достатній для представлення класу якісно однотипних об'єктів. Ідеальні тверді тіла, пружності та демпфери вважатимемо фреймами механічної природи, а ідеальні індуктивності, ємності та омичні опори – електромагнітної.

До об'єднання в агрегат елементи розрахункової схеми нічим не з'єднані, їх рухи нічим не обмежені. Конфігурація сукупності визначається опорними координатами

$$\xi^{\beta} \quad \forall \beta \in [\overline{1, N}], \quad (1)$$

де N – кількість таких координат.

Після сполучення, на рухи елементів накладаються обмеження, які відображаються рівняннями зв'язків. Вважатимемо їх голономними склерономними

$$\xi^{\beta} = \xi^{\beta}(\eta^{\lambda}) \quad \forall \beta \in [\overline{1, N}], \lambda \in [\overline{1, \Lambda}], \quad (2)$$

де $\eta^{\lambda} \quad \forall \lambda \in [\overline{1, \Lambda}]$ – узагальнені координати системи;

Λ – кількість її ступенів волі.

Тобто елементи з'єднані згідно з структурою агрегату, що визначається його структурною матрицею [10]:

$$S = \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^{\lambda}} \quad \forall \beta \in [\overline{1, N}], \lambda \in [\overline{1, \Lambda}]. \quad (3)$$

Ідеальні (безінерційні) податливі елементи розрахункової схеми можуть бути враховані шляхом запровадження узагальнених сил, що виникають за зміни їх стану. Зазвичай, прийнято вважати, що це сили є пропорційними значенням і швидкостям зміни величин, які характеризують стани зазначених елементів:

$$E_\mu = k_\mu \cdot \Delta_\mu + n_\mu \cdot \dot{\Delta}_\mu \quad \forall \mu \in [\overline{1, D}], \quad (4)$$

де $E_\mu, \Delta_\mu, \dot{\Delta}_\mu$ – узагальнена сила в μ -ому елементі, значення та швидкість зміни величини, що характеризує його стан;

$k_\mu, n_\mu; D$ – коефіцієнти пропорційності, а також кількість податливих елементів у розрахунковій схемі вагона.

Використовуючи будь-яку систему електромеханічних аналогій [11], кожної з величин, що входять до (4), може бути надана фізична інтерпретація. Наприклад, у першій з таких систем:

– для механічного податливого елемента:

E_μ – сила, або момент;

$\Delta_\mu, \dot{\Delta}_\mu$ – значення та швидкість зміни деформації;

k_μ, n_μ – жорсткість та коефіцієнт в'язкого опору;

– для електромагнітного елемента:

E_μ – прикладена до нього електрична напруга;

$\Delta_\mu, \dot{\Delta}_\mu$ – заряд та струм через елемент;

k_μ, n_μ – його ж інверсна ємність та омичний опір.

При такій постановці, розрахункова схема системи являє собою агрегат ідеальних інерційних елементів, з'єднаних згідно структурної матриці S . На кожен із цих елементів через в'язі, у їх взаємодії з податливими елементами, діють узагальнені сили реакцій:

$$R_\gamma = R_\gamma(E_\lambda) \quad \forall \gamma \in [\overline{1, J}], \lambda \in [\overline{1, H}], \quad (5)$$

де J, H – число в'язів, накладених на інерційний елемент, і кількість взаємодіючих із ним елементів податливих.

Ззовні на інерційний елемент діють узагальнені сили:

$$W_\varepsilon = W_\varepsilon(\chi_\tau) \quad \forall \varepsilon \in [\overline{1, V}], \tau \in [\overline{1, A}], \quad (6)$$

де $V, \chi_\tau \quad \forall \tau \in [\overline{1, A}], A$ – число шляхів взаємодії інерційного елемента із середовищем, параметри середовища та кількість таких параметрів.

З використанням принципу звільнення від в'язів, а також узагальної теореми Пуансо [12], система сил, що діє на j -ий інерційний елемент, може бути приведена до їх головного вектора

$$F_j = F_j(R_\gamma, W_\varepsilon) \quad \forall \gamma \in [\overline{1, J}], \varepsilon \in [\overline{1, V}] \quad (7)$$

та головного моменту

$$M_j = M_j(R_\gamma, W_\varepsilon) \quad \forall \gamma \in [\overline{1, J}], \varepsilon \in [\overline{1, V}]. \quad (8)$$

Тоді рух i -го інерційного елемента розрахункової схеми може бути описано рівнянням [13]

$$f_{i\alpha\beta} \cdot \ddot{\varepsilon}_i^\beta + E_{i\alpha, \beta\gamma} \cdot \dot{\varepsilon}_i^\beta \cdot \dot{\varepsilon}_i^\gamma = K_{i\alpha} \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in [\overline{1, G}], \quad (9)$$

де $f_{i\alpha\beta}, E_{i\alpha, \beta\gamma} \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in [\overline{1, G}]$ – розширений тензор інерції елемента та його триндексний символ Крістоффеля першого роду;

$\varepsilon_i^\beta \quad \forall \beta \in [\overline{1, G}], G, K_{i\alpha} \quad \forall \alpha \in [\overline{1, G}]$ – його ж опорні координати, їх число та відповідні узагальнені сили.

Справедливими є також співвідношення [13]

$$E_{i\alpha, \beta\gamma} = 0,5 \cdot \left(\frac{\partial f_{i\alpha\beta}}{\partial \varepsilon_i^\gamma} + \frac{\partial f_{i\alpha\gamma}}{\partial \varepsilon_i^\beta} - \frac{\partial f_{i\beta\gamma}}{\partial \varepsilon_i^\alpha} \right) \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in [\overline{1, G}]. \quad (10)$$

Крім того

$$K_{i\alpha} = K_{i\alpha}(F_i, M_i) \quad \forall \alpha \in [\overline{1, G}]. \quad (11)$$

Інтерпретація та вид залежностей елементів рівнянь (9) від параметрів інерційного елемента визначається його природою.

Для i -го твердого тіла (механічного фрейму), $G = 6$ та його динаміку зручно описувати з використанням правих ортонормованих трієдрів:

$OX_p \quad \forall p \in [1, 3]$ – абсолютного (інерційного); $iCZ_r \quad \forall r \in [1, 3]$ – жорстко пов'язаного з розглянутим тілом. Осі останнього трієдра збігаються з головними центральними осями тіла. Взаємна орієнтація цих трієдрів визначима за допомогою напрямних косинусів:

$$\begin{matrix} x_{iAp} \\ z_{iAr} \\ u_{ip} \end{matrix}, \quad (12)$$

де $x_{iAp}, z_{iAr}, \forall p, r \in [1, 3]$ – декартові координати точки А тіла у цих трієдрах;
 $u_{irp}, \forall r, p \in [1, 3]$ – матриця перетворення координат 3-поміж них.
Після введення координат $\varepsilon_i^{\beta}, \forall \beta \in [1, 6]$

$$\varepsilon_i^1 = x_{iC1}; \quad \varepsilon_i^2 = x_{iC2}; \quad \varepsilon_i^3 = x_{iC3};$$

$$\varepsilon_i^4 = \tilde{\varphi}_i; \varepsilon_i^5 = \tilde{\Theta}_i; \varepsilon_i^6 = \tilde{\gamma}_i, \quad (13)$$

отримуємо

$$f_{i\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} f_{it} & 0 \\ 0 & f_{ir} \end{Bmatrix} \quad \forall \alpha, \beta \in [1, 6];$$

$$f_{it} = \text{diag}\{m_i, m_i, m_i\}; \quad f_{ir} = \begin{Bmatrix} f_{i44} & f_{i45} & f_{i46} \\ f_{i54} & f_{i55} & 0 \\ f_{i64} & 0 & f_{i66} \end{Bmatrix}; \quad (14)$$

$$f_{i44} = (I_{i11} \cdot \cos^{(2)} \tilde{\gamma}_i + I_{i22} \cdot \sin^{(2)} \tilde{\gamma}_i) \cdot \cos^{(2)} \tilde{\Theta}_i + I_{i33} \cdot \sin^{(2)} \tilde{\Theta}_i;$$

$$f_{i45} = f_{i54} = (I_{i11} - I_{i22}) \cdot \cos \tilde{\Theta}_i \cdot \sin \tilde{\gamma}_i \cdot \cos \tilde{\gamma}_i; \quad f_{i46} = f_{i64} = I_{i33} \cdot \sin \tilde{\Theta}_i;$$

$$f_{i55} = I_{i11} \cdot \sin^{(2)} \tilde{\gamma}_i + I_{i22} \cdot \cos^{(2)} \tilde{\gamma}_i; \quad f_{i66} = I_{i33}; \quad (15)$$

ненульові елементи $E_{i\alpha, \beta\gamma}, \forall \alpha, \beta, \gamma \in [1, 6]$

$$E_{i4,45} = E_{i4,54} = [I_{i33} - (I_{i11} \cdot \cos^{(2)} \tilde{\gamma}_i + I_{i22} \cdot \sin^{(2)} \tilde{\gamma}_i)] \cdot \sin \tilde{\Theta}_i \cdot \cos \tilde{\gamma}_i;$$

$$E_{i4,46} = E_{i4,64} = (I_{i22} - I_{i11}) \cdot \cos^{(2)} \tilde{\Theta}_i \cdot \sin \tilde{\gamma}_i \cdot \cos \tilde{\gamma}_i;$$

$$E_{i4,55} = (I_{i22} - I_{i11}) \cdot \sin \tilde{\Theta}_i \cdot \sin \tilde{\gamma}_i \cdot \cos \tilde{\gamma}_i;$$

$$E_{i4,56} = E_{i4,65} = 0,5 \cdot [I_{i33} + (I_{i11} - I_{i22}) \cdot (\cos^{(2)} \tilde{\gamma}_i - \sin^{(2)} \tilde{\gamma}_i)] \cdot \cos \tilde{\Theta}_i;$$

$$E_{i5,44} = -[I_{i33} - (I_{i11} \cdot \cos^{(2)} \tilde{\gamma}_i + I_{i22} \cdot \sin^{(2)} \tilde{\gamma}_i)] \cdot \sin \tilde{\Theta}_i \cdot \cos \tilde{\gamma}_i;$$

$$E_{i5,46} = E_{i5,64} = 0,5 \cdot [(I_{i11} - I_{i22}) \cdot (\cos^{(2)} \tilde{\gamma}_i - \sin^{(2)} \tilde{\gamma}_i) - I_{i33}] \cdot \cos \tilde{\Theta}_i;$$

$$E_{i5,56} = E_{i5,65} = (I_{i11} - I_{i22}) \cdot \sin \tilde{\gamma}_i \cdot \cos \tilde{\gamma}_i;$$

$$E_{i6,44} = (I_{i11} - I_{i22}) \cdot \cos^{(2)} \tilde{\Theta}_i \cdot \sin \tilde{\gamma}_i \cdot \cos \tilde{\gamma}_i;$$

$$E_{i6,45} = E_{i6,54} = 0,5 \cdot [I_{i33} - (I_{i11} - I_{i22}) \cdot (\cos^{(2)} \tilde{\gamma}_i - \sin^{(2)} \tilde{\gamma}_i)] \cdot \cos \tilde{\Theta}_i;$$

$$E_{i6,55} = (I_{i22} - I_{i11}) \cdot \sin \tilde{\gamma}_i \cdot \cos \tilde{\gamma}_i. \quad (16)$$

$$K_{i\alpha} = \begin{Bmatrix} F_{iX1} & F_{iX2} & F_{iX3} & M_{i1}^* & M_{i2}^* & M_{i3}^* \end{Bmatrix}^T; \quad (17)$$

$$M_{i1}^* = (M_{iZ1} \cdot \cos \tilde{\gamma}_i - M_{iZ2} \cdot \sin \tilde{\gamma}_i) \cdot \cos \tilde{\Theta}_i + M_{iZ3} \cdot \sin \tilde{\Theta}_i;$$

$$M_{i2}^* = M_{iZ1} \cdot \sin \tilde{\gamma}_i + M_{iZ2} \cdot \cos \tilde{\gamma}_i; \quad M_{i3}^* = M_{iZ3}. \quad (18)$$

У виразах (13)-(18) позначено:

$x_{iC\alpha}, \forall \alpha \in [1, 3]$ – координати центру мас тіла в інерційній системі $OX_p, \forall p \in [1, 3]$;

$m_i; I_{iZ\alpha}, \forall \alpha \in [1, 3]; \tilde{\varphi}_i, \tilde{\Theta}_i, \tilde{\gamma}_i$ – його маса, головні центральні моменти інерції, а також ейлерові кути щодо тієї самої системи відліку;

$F_{iX\alpha}, M_{iZ\alpha}, \forall \alpha \in [1, 3]$ – задані в інерційній та зв'язаній системах координат, приведені до центру інерції тіла головний вектор та головний момент доданих до нього зовнішніх сил.

Для електромагнітного інерційного кадру, приймаючи

$$\varepsilon_i^1 = q_i, \quad (19)$$

$$f_{i\alpha\beta} = L_i, \quad \alpha = \beta = 1; \quad (20)$$

$$E_{i\alpha,\beta\gamma} = 0, \quad \alpha = \beta = \gamma = 1; \quad (21)$$

$$K_{i\alpha} = U_i, \quad \alpha = 1. \quad (22)$$

У виразах (19)–(22) позначено:

q_i, L_i, U_i – заряд, що протікає через поперечний переріз фрейму, його індуктивність, а також прикладена до нього напруга.

Використовуючи вираз (9), рух агрегату, що є розрахунковою схемою вагона, можна описати тензорним рівнянням виду:

$$b_{\alpha\beta} \cdot \ddot{\xi}^\beta + B_{\alpha,\beta\gamma} \cdot \dot{\xi}^\beta \cdot \dot{\xi}^\gamma = Q_\alpha \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in [\overline{1, N}], \quad (23)$$

$$b_{\alpha\beta} = \text{diag} \{ \|f_{1\varepsilon v}\|, \|f_{2\varepsilon v}\|, \dots, \|f_{\Phi\varepsilon v}\| \} \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in [\overline{1, N}]; \quad \varepsilon, v \in [\overline{1, G}]; \quad (24)$$

$$B_{\alpha,\beta\gamma} = \text{diag} \{ [E_{1\varepsilon, v\chi}], [E_{2\varepsilon, v\chi}], \dots, [E_{\Phi\varepsilon, v\chi}] \} \\ \forall \alpha, \beta, \gamma \in [\overline{1, N}]; \quad \varepsilon, v, \chi \in [\overline{1, G}]; \quad (25)$$

$$Q_\alpha = \|K_{1\varepsilon} \ K_{2\varepsilon} \ \dots \ K_{\Phi\varepsilon}\|^T \quad \forall \alpha \in [\overline{1, N}]; \quad \varepsilon \in [\overline{1, G}], \quad (26)$$

де $b_{\alpha\beta}, B_{\alpha,\beta\gamma} \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in [\overline{1, N}]$ – тензор інерції агрегату та його триндексний символ Крістоффеля в координатах $\xi^\beta \quad \forall \beta \in [\overline{1, N}]$;

$Q_\alpha \quad \forall \alpha \in [\overline{1, N}]$ – узагальнені сили, що відповідають цим координатам;

Φ – кількість інерційних елементів у розрахунковій схемі вагона.

Рівняння (23) тензорні. Тому вони інваріантні до перетворень координат. Тобто в узагальнених координатах $\eta^\lambda \quad \forall \lambda \in [\overline{1, \Lambda}]$ форма моделі руху вагона матиме вигляд, аналогічний (23). Зміняться, з використанням матриці перетворення S , лише вирази елементів моделі.

З рівнянь зв'язків (2) випливає, що

$$\dot{\xi}^\beta = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \eta^\lambda} \cdot \dot{\eta}^\lambda \quad \forall \beta \in [\overline{1, N}], \quad \lambda \in [\overline{1, \Lambda}]; \quad (27)$$

$$\ddot{\xi}^\beta = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \eta^\lambda} \cdot \ddot{\eta}^\lambda + \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial \eta^\lambda \partial \eta^\mu} \cdot \dot{\eta}^\lambda \cdot \dot{\eta}^\mu \quad \forall \beta \in [\overline{1, N}]; \quad \lambda, \mu \in [\overline{1, \Lambda}]. \quad (28)$$

Помножуючи обидві частини рівняння (23) на структурну матрицю (3), зі згортокою по α , приходимо до рівнянь:

$$b_{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^\lambda} \cdot \ddot{\xi}^\beta + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^\lambda} \cdot B_{\alpha,\beta\gamma} \cdot \dot{\xi}^\beta \cdot \dot{\xi}^\gamma = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^\lambda} \cdot Q_\alpha \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in [\overline{1, N}]; \quad \lambda \in [\overline{1, \Lambda}]. \quad (29)$$

Врахування ж співвідношень (7), (8), (11) і (26) дозволяє записати:

$$Q_\alpha = Q_\alpha (R_\gamma, W_\varepsilon) \quad \forall \alpha \in [\overline{1, N}]; \quad \eta \in [\overline{1, \tilde{J}}]; \quad \varepsilon \in [\overline{1, \tilde{V}}], \quad (30)$$

де $\tilde{J}, \tilde{V}$ – число в'язів, накладених на елементи розрахункової схеми, а також шляхів їх взаємодії із зовнішнім середовищем. З урахуванням теореми про ідеальність в'язів [12]:

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^\lambda} \cdot Q_\alpha (R_\gamma) \equiv 0 \quad \forall \alpha \in [\overline{1, N}], \quad \lambda \in [\overline{1, \Lambda}], \quad \gamma \in [\overline{1, \tilde{J}}], \quad (31)$$

рівняння (29) набувають вигляду:

$$b_{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^\lambda} \cdot \ddot{\xi}^\beta + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^\lambda} \cdot B_{\alpha,\beta\gamma} \cdot \dot{\xi}^\beta \cdot \dot{\xi}^\gamma = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^\lambda} \cdot Q_\alpha (W_\varepsilon) \\ \forall \alpha, \beta, \gamma \in [\overline{1, N}]; \quad \lambda \in [\overline{1, \Lambda}]; \quad \varepsilon \in [\overline{1, \tilde{V}}]. \quad (32)$$

Підстановка виразів (27) та (28) у рівняння (32), після введення додаткових позначень:

$$c_{\lambda\mu} = b_{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^\lambda} \cdot \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \eta^\mu} \quad \forall \alpha, \beta \in [\overline{1, N}]; \quad \lambda, \mu \in [\overline{1, \Lambda}]; \quad (33)$$

$$C_{\lambda\mu\nu} = b_{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^\lambda} \cdot \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial \eta^\lambda \partial \eta^\nu} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^\lambda} \cdot \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \eta^\mu} \cdot \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial \eta^\nu} \cdot B_{\alpha\beta\gamma} \\ \alpha, \beta, \gamma \in [\overline{1, N}]; \lambda, \mu, \nu \in [\overline{1, \Lambda}]; \quad (34)$$

$$Y_\lambda = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^\lambda} \cdot Q_\alpha(W_\varepsilon) \quad \forall \alpha \in [\overline{1, N}]; \lambda \in [\overline{1, \Lambda}]; \varepsilon \in [\overline{1, \tilde{V}}], \quad (35)$$

дозволяє привести модель природного руху вагона маглев поїзда, записану в узагальнених координатах $\eta^\lambda \forall \lambda \in [\overline{1, \Lambda}]$, до вигляду

$$c_{\lambda\mu} \cdot \ddot{\eta}^\mu + C_{\lambda,\mu\nu} \cdot \dot{\eta}^\mu \cdot \dot{\eta}^\nu = Y_\lambda \quad \forall \lambda, \mu, \nu \in [\overline{1, \Lambda}], \quad (36)$$

де $c_{\lambda\mu}$, $C_{\lambda,\mu\nu}$, $Y_\lambda \forall \lambda, \mu, \nu \in [\overline{1, \Lambda}]$ – коваріантний метричний тензор агрегату, що є розрахунковою схемою вагона, триіндексний символ Крістофеля першого роду зазначеного агрегату в координатах $\eta^\lambda \forall \lambda \in [\overline{1, \Lambda}]$, а також узагальнені сили, що відповідають цим координатам.

Може бути показано [13,14], що, аналогічно (10):

$$C_{\lambda,\mu\nu} = 0,5 \cdot \left(\frac{\partial c_{\lambda\mu}}{\partial \eta^\nu} + \frac{\partial c_{\lambda\nu}}{\partial \eta^\mu} - \frac{\partial c_{\mu\nu}}{\partial \eta^\lambda} \right) \quad \forall \lambda, \mu, \nu \in [\overline{1, \Lambda}]. \quad (37)$$

Основою побудови моделі руху (36) є рівняння (23), які описують базову динаміку системи, що досліджується, а також матриця перетворення (3), яка відображає структуру її агрегату. Тому отримана модель відповідає вимогам холистичного врахування як параметричної, так і структурної організації вагона, що розглядається. Тензорний характер моделі (36) дозволяє будувати та перебудовувати модель руху у будь-якій системі координат $\eta^\lambda \forall \lambda \in [\overline{1, \Lambda}]$, тобто – для будь-якої структури розрахункової схеми вагона.

Висновки дослідження та перспективи його продовження. У дослідженні, на прикладі вагона маглев поїзда, виконано розвиток методики тензорного моделювання його динаміки. Продемонстровано переваги такої методики порівняно з іншими, загальноприйнятими. У структурі об'єкта розгляду враховано наявність основних, значущих для його рухів – механічних і електромагнітних – елементів. Методика, що розробляється, може з успіхом використовуватися при дослідженнях динаміки, зокрема, зазначеного типу поїздів. Це сприятиме спрощенню та полегшенню таких досліджень, а також підвищенню якості їх результатів.

Список використаних джерел:

1. Schneider G., Schmid P., Kargl A., Liang X., Dign F. & Eberhard P. Simulation of a High-Speed Maglev Train on an Elastic Guideway of Infinite Length MAGLEV. *25th International Conference on Magnetically Levitated Systems and Linear Drives*. 2022. URL: <https://elib.uni-stuttgart.de/server/api/core/bitstreams/c26533d5-e4f3-427a-807b-4e0769eb0878/content>
2. Zhiqiang L., Yun L., Xu W. On maglev train automatic operation control system based on a disturbance-rejection control algorithm. *27th Chinese Control Conference*. IEEE. 2008. P. 681–685. DOI:10.1109/CHICC.2008.4605180
3. Guodong W., Lei Y., Lianchuan M. Model-based Simulation and Verification on Typical Function Scenes of High-Speed Maglev Vehicle Operation Control System. *Journal of Physics: Conference Series*. IOP Publishing. 2020. № 1654 (1). P. 12–19. URL: <https://iopscience.iop.org/issue/1742-6596/1654/1>
4. Zou Z., Zheng M., Lu Q. Modeling and Simulation of Traction Power Supply System for High-Speed Maglev Train. *World Electr. Veh. J.* 2022. № 13(5). URL: <https://doi.org/10.3390/wevj13050082>
5. Ying Z., Enwei J., Yongjun L., Hengxin L. Train operation simulation and capacity analysis for a high-speed maglev station Lianbo Deng. *IET Intelligent Transport Systems*. 2024. URL: <https://doi.org/10.1049/itr2.12607>
6. Li X., Liu A., Yu M., Yang S., Shao Q., Lei T. Hardware-in-loop simulation of high vehicle based on Hi Gale. *Proceedings V. 136559. Second International Conference on Electronics, Electrical and Control Systems (EECS 2025)*. 1365920. 2025. URL: <https://doi.org/10.1117/12.3070680>
7. Поляков В. А., Хачапуридзе Н. М. Моделирование относительного движения магнитолевитирующего поезда. *Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені акад. В. Лазаряна*. 2006. № 14. С. 146-151.
8. Поляков В. А., Хачапуридзе Н. М. Тензорное моделирование движения магнитолевитирующего поезда относительно пути. *Вестн. ХНТУ*. 2007. № 2 (28). С. 265–270.
9. Sinje J. L. *Tensor Methods in Dynamics*. Toronto: University of Toronto Press. Department of Applied Mathematics. 1936. 43 p.
10. Schilirò D. Structural change and models of structural analysis: theories, principles and methods. MPRA Paper No. 41817. URL: <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/41817/>

-
11. Uklejewski R., Krakowski M. Electromechanical Analogies for the Theory of Consolidation. *Engineering Transactions*. 1982. V. 30(3-4). P. 317–326. URL: <https://et.ippt.pan.pl/index.php/et/article/view/1982>
 12. Діннік О. Н. Курс теоретичної механіки. Ч. 2. Динаміка. Дніропетровськ: ДВОУ Техвидав. 1931. 148 с.
 13. Кільчевський М. О., Нечипоренко Г. Д., Шальда Л. М. Основи аналітичної механіки. Київ: Наук. Думка. 1975. 220 с.
 14. Needham T. Visual differential Geometry and Forms. Princeton University Press. 2021. 531 p. URL: <https://agorism.dev/book/math/diff-geom/Visual%20Differential%20Geometry%20and%20Forms%3A%20A%20Mathematical%20Drama%20in%20Five%20Acts%20by%20Tristan%20Needham.pdf>

References:

1. Schneiderl, G., Schmidl, P., Kargl, A., Liang, X., Dign, F., & Eberhardl, P. (2022). Simulation of a High-Speed Maglev Train on an Elastic Guideway of Infinite Length MAGLEV. *25th International Conference on Magnetically Levitated Systems and Linear Drives*. Retrieved from: <https://elib.uni-stuttgart.de/server/api/core/bitstreams/c26533d5-e4f3-427a-807b-4e0769eb0878/content>
2. Zhiqiang, L., Yun, L. & Xu, W. (2008). On maglev train automatic operation control system based on a auto-disturbance-rejection control algorithm. *27th Chinese Control Conference*. IEEE. P. 681–685. DOI:10.1109/CHICC.2008.4605180
3. Guodong, W., Lei, Y., & Lianchuan, M. (2020). Model-based Simulation and Verification on Typical Function Scenes of High-Speed Maglev Vehicle Operation Control System. *Journal of Physics: Conference Series*. IOP Publishing. № 1654 (1). P. 12–19. Retrieved from: <https://iopscience.iop.org/issue/1742-6596/1654/1>
4. Zou, Z., Zheng, M. & Lu, Q. (2022). Modeling and Simulation of Traction Power Supply System for High-Speed Maglev Train. *World Electr. Veh. J.* № 13(5). <https://doi.org/10.3390/wevj13050082>
5. Ying, Z., Enwei, J., Yongjun, L. & Hengxin, L. (2024). Train operation simulation and capacity analysis for a high-speed maglev station Lianbo Deng. *IET Intelligent Transport Systems*. <https://doi.org/10.1049/itr2.12607>
6. Li, X., Liu A., Yu, M., Yang, S., Shao, Q. & Lei, T. (2025). Hardware-in-loop simulation of high vehicle based on Hi Gale. *Proceedings V. 136559. Second Internationale Conference on Electronics, Electrical and Control Systems (EECS 2025)*. 1365920 <https://doi.org/10.1117/12.3070680>.
7. Poliakov, V. A. & Khachapurydze, N. M. (2006). Modelyrovanye odnosytnoho dvyzheniya mahnytolevytyruishcheho poezda. *Visnyk Dnipropetrovskoho natsionalnoho universytetu zaliznychnoho transportu imeni akad. V. Lazariana*. № 14. S. 146–151.
8. Poliakov, V. A. & Khachapurydze, N. M. (2007). Tenzornoe modelyrovanye dvyzheniya mahnytolevytyruishcheho poezda odnosytno puty. *Vestn. KhNTU*. № 2 (28). S. 265–270.
9. Sinje, J. L. Tensor Methods in Dynamics. (1936) Toronto: University of Toronto Press. Department of Applied Mathematics.
10. Schilirò, D. Structural change and models of structural analysis: theories, principles and methods. MPRA Paper No. 41817. Retrieved from: <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/41817/>
11. Uklejewski, R. & Krakowski, M. (1982) Electromechanical Analogies for the Theory of Consolidation. *Engineering Transactions*. V. 30(3-4). P. 317–326. Retrieved from: <https://et.ippt.pan.pl/index.php/et/article/view/1982>
12. Dinnik, O. N. (1931) Kurs teoretychnoi mekhaniky. Ch. 2. Dynamika. Dniropetrovsk: DVOU Tekhvydav.
13. Kilchevskiy, M. O., Nechiporenko, H. D. & Shalda, L. M. (1975). Osnovy analitychnoi mekhaniky. Kyiv: Nauk. Dumka.
14. Needham, T. (2021) Visual differential Geometry and Forms. Princeton University Press. Retrieved from: <https://agorism.dev/book/math/diff-geom/Visual%20Differential%20Geometry%20and%20Forms%3A%20A%20Mathematical%20Drama%20in%20Five%20Acts%20by%20Tristan%20Needham.pdf>

Дата надходження статті: 28.10.2025

Дата прийняття статті: 17.11.2025

Опубліковано: 30.12.2025