

Зайцева Т. А., кандидат технічних наук, доцент,
завідувач кафедри комп'ютерних технологій
Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара
ORCID: 0000-0002-6346-3390

Гончаров Я. А., аспірант кафедри комп'ютерних технологій
Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара
ORCID: 0009-0002-8994-8895

СИНЕРГЕТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ANSYS I MATLAB ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ШТАМПА СКЛАДНОЇ ГЕОМЕТРІЇ З ПРУЖНИМ ПІВПРОСТОРОМ

У статті представлено інтегровану методіку чисельного моделювання контактної взаємодії абсолютно жорсткого штампа складної геометрії з однорідним ізотропним пружним півпростором, що базується на синергетичному застосуванні програмних платформ ANSYS та MATLAB. Геометрія контактної області задана у вигляді двозв'язного кільця, контур якого описується концентричними кривими. Реалізовано побудову скінченно-елементної моделі в середовищі ANSYS з урахуванням складної геометрії, граничних умов та навантаження, що дозволило отримати детальний розподіл контактних напружень. Особливу увагу приділено адаптивному дискретизуванню зони контакту з метою забезпечення збіжності чисельного рішення та підвищення точності розрахунків. Після завершення симуляції середовищі ANSYS, результати експортовано у MATLAB, де реалізовано алгоритми постобробки та графічну інтерпретацію даних. Здійснено 3D-візуалізацію скінченно-елементної моделі, напружено-деформованого стану, побудову ізоліній контактного тиску та аналіз крайових ефектів. Застосування MATLAB дозволило виявити локальні особливості розподілу тиску, зони концентрації напружень та області зниженої контактної взаємодії та виконано розрахунки для кілець різної ширини. Запропонована методика охоплює повний обчислювальний цикл, що включає етапи побудови геометричної моделі, її чисельного розв'язання та подальшої інтерпретації отриманих результатів. Отримані дані можуть бути використані для верифікації моделей, оптимізації конструктивних параметрів, а також для розробки прикладних інженерних методик у межах задач контактної механіки, особливо в умовах складної геометрії зон взаємодії.

Ключові слова: моделювання, метод скінченних елементів, контактна задача, штамп, теорія пружності, постпроцесінг., візуалізація даних, розподіл напружень, геометрія зони контакту, ANSYS, MATLAB.

Zaytseva T. A., Honcharov Ya. A. Synergetic Application of ANSYS and MATLAB for Modeling the Contact Interaction of a Complex-Shaped Stamp with an Elastic Half-Space

An integrated methodology for numerical modeling of the contact interaction between a perfectly rigid punch of complex geometry and an isotropic elastic half-space is presented, based on the synergistic use of ANSYS and MATLAB. The approach treats the contact region as a doubly connected ring (annular domain) whose inner and outer boundaries are described by concentric curves, thereby capturing geometric features that strongly influence local stress fields. A finite-element model was constructed in ANSYS with due account of the intricate geometry, boundary conditions, and loading schemes; this enabled the computation of a detailed distribution of contact stresses and displacements under prescribed indentation scenarios. A systematic sensitivity analysis with respect to mesh density, local refinement near anticipated singular zones, and interpolation settings was performed, leading to practical convergence criteria and stable error tolerances suitable for repeated studies. Special attention was paid to adaptive discretization of the contact zone so as to ensure numerical convergence, suppress spurious oscillations, and improve the accuracy of peak-stress estimation along the edges of the active contact. Upon completion of the simulation, the computed fields were exported to MATLAB, where a dedicated post-processing pipeline was implemented to provide consistent graphical interpretation and quantitative comparison. In particular, masking outside the physically realized contact patch was applied to eliminate non-physical interpolation artifacts and to isolate the effective load-transfer area for analysis. The toolkit supports the generation of contour maps of contact pressure, 3D visualizations of the stress-strain state, and targeted diagnostics of edge effects, including the localization and ranking of stress concentration zones. The use of MATLAB also facilitates the identification of local features in the pressure distribution and regions of reduced contact interaction, and it enables structured parametric comparisons across multiple geometric variants and loading levels using a uniform set of metrics. Overall, the proposed methodology spans the full computational cycle—from geometric modeling and robust finite-element solution to standardized interpretation and reporting of results—and is designed to be scalable and amenable to scripting and automation for batch studies. The resulting datasets and visual products can be directly used for verification and validation of models, optimization of design parameters, and the

© Т. А. Зайцева, Я. А. Гончаров, 2025

Стаття поширюється на умовах ліцензії CC BY 4.0

development of applied engineering practices for contact mechanics problems, particularly in settings with complex interaction geometries and pronounced stress gradients where reliable resolution of edge behavior is essential.

Key words: modeling, finite element method (FEM), contact problem, punch, theory of elasticity, post-processing, data visualization, stress distribution, contact zone geometry ANSYS, MATLAB.

Постановка проблеми. Контактна взаємодія тіл складної геометрії становить одну з ключових задач механіки деформівного тіла, що має широке застосування в галузях прикладної механіки, трибології, матеріалознавства та інженерного конструювання. Особливий інтерес викликають конфігурації контактної області, які не піддаються класичному аналітичному опису. У таких умовах застосування традиційних аналітичних методів є обмеженим через складність граничних умов, геометричну неоднорідність та потенційну нелінійність механічної відповіді системи і як наслідок, складність математичного апарату [10].

Метод скінчених елементів (МСЕ), реалізований у середовищі ANSYS, забезпечує можливість побудови дискретизованої моделі з урахуванням складної геометрії, матеріальних параметрів та умов навантаження, що дозволяє отримати прийнятні чисельні оцінки напружено-деформівного стану в зоні контакту [6]. Але складність і обмеженість у деякому сенсі функціональних можливостей постпроцесінгу в програмному середовищі ANSYS, трохи заважають проведенню аналізу результатів і комплексних досліджень. У цьому контексті доцільним є синергетичне використання ANSYS та MATLAB як взаємодоповнювальних обчислювальних платформ: ANSYS – для реалізації чисельного моделювання фізичних процесів, MATLAB – для поглибленої обробки, статистичного аналізу та візуалізації отриманих даних, що забезпечує підвищення точності та інформативності дослідницьких висновків. Реалізація даного підходу є особливо релевантною в контексті підвищення достовірності чисельного моделювання, раціоналізації конструктивних рішень та формування новітніх інженерних методик для аналізу задач контактної механіки, що характеризуються складною конфігурацією зон взаємодії [10].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботах [6-9] детально розглянуто теоретичні засади механіки суцільного середовища, принципи побудови скінченно-елементних моделей, методи дискретизації та критерії збіжності чисельних алгоритмів. У статті [5] досліджується задача вдавнення абсолютно жорсткого штампа без тертя у тонкий пружний шар, що спирається на жорстку основу. Такі аналітичні моделі відіграють ключову роль у процесі верифікації чисельних рішень, отриманих за допомогою МСЕ.

Сучасні алгоритмічні підходи до розв'язання задач контактної механіки в континуальних середовищах узагальнено в [17], де наведено огляд алгоритмів на основі швидкого перетворення Фур'є (FFT) для ефективного розв'язання контактних задач. У роботі [14] запропоновано гранично-елементний підхід для осьово-симетричних задач напівпростору: наведено фундаментальні рішення Ліпшиця–Генкеля та чисельні схеми обчислення впливових коефіцієнтів, що забезпечують умови нульової напруги на поверхні та спад напружень у віддаленості. Практичні реалізації цих алгоритмів демонструють високу точність та ефективність при моделюванні контактних процесів із різною геометрією. Застосування асимптотичних методів, що дозволяють отримувати аналітичні наближення, представлено у [15]. Важливе місце у розвитку моделювання займають дослідження, орієнтовані на реалістичне відтворення взаємодії конструкцій і основи, або фундаменту. Зокрема, у [13] здійснено повний тривимірний FEM-аналіз взаємодії будівлі з неоднорідним ґрунтом. Ґрунт описано модифікованою моделлю Cam-Clay з параметрами, визначеними за польовими (СРТ, SDMT) та лабораторними випробуваннями. У [16] досліджено вплив виробничих та геометричних похибок не симетричного кільцевого штампа на розподіл контактних напружень по поверхні півпростору. Авторами у праці [4] досліджено осесиметричний контакт кругового штампа з пружним півпростором у межах лінійної теорії пружності з урахуванням попереднього (початкового) напруженого стану.

Попри значну теоретичну цінність аналітичних моделей, їх застосування обмежене складністю геометрії, неоднорідністю матеріалу та граничними умовами, що притаманні реальним інженерним задачам. У зв'язку з цим усе більшого значення набувають чисельні методи, здатні забезпечити гнучкість і високу точність моделювання складних фізико-механічних процесів. Треба відзначити, що ANSYS залишається провідним програмним середовищем для інженерного аналізу завдяки універсальності та широкому набору фізичних модулів. У [12] підкреслюється, що ця платформа поєднує високу точність і гнучкість проведення розрахунків для різних типів задач – від теплопровідності до контактної механіки. Однак у роботі [2] акцентується, що ефективність чисельного моделювання значно зростає при поєднанні ANSYS із MATLAB. Останній використовується для створення алгоритмів керування, автоматизації постпроцесінгу та реалізації спеціалізованих обчислювальних сценаріїв, які важко виконати виключно засобами ANSYS. Такий інтегрований підхід, коли ANSYS відповідає за точність розрахунків, а MATLAB – за гнучкість аналізу та візуалізацію, забезпечує найбільш повне використання можливостей чисельного моделювання.

Сукупність розглянутих джерел формує наукову основу для визнання актуальності чисельного моделювання в задачах контактної механіки, де метод скінчених елементів у середовищі ANSYS демонструє високу точність. Поєднання ANSYS із MATLAB дозволяє суттєво розширити аналітичні можливості, забезпечуючи гнучку обробку та візуалізацію результатів.

Розглядається задача про вдавнення абсолютно жорсткого циліндричного штампа з плоскою основою у однорідний ізотропний пружний півпростір. Поперечний переріз штампа має форму двозв'язного кільця

некругової геометрії, межі якого описуються концентричними лемніскадами Бута. Штамп заглиблюється у півпростір під дією вертикальної сили, що прикладена у центрі тяжіння штамп. У моделі не враховується сила тертя між штампом і півпростором.

Метою дослідження є формалізація, чисельна реалізація та верифікація математичної моделі контактної взаємодії абсолютно жорсткого циліндричного штамп у формі не кругового кільця, поперечний переріз якого описується системою концентричних лемніскад Бута, з однорідним ізотропним пружним півпростором під дією вертикальної сили, що прикладена у центрі мас штамп. Для досягнення поставленої мети передбачено побудову скінченно-елементної моделі в програмному середовищі ANSYS, інтеграцію з MATLAB для розширеного постпроцесінгу, а також дослідження впливу геометричних параметрів штамп та умов навантаження на напружено-деформований стан у зоні контакту.

Виклад основного матеріалу. Відповідно до поставленої мети, нижче наведено структуровану послідовність етапів побудови чисельної моделі контактної взаємодії, яка представлена на рисунку 1. Математична постановка задачі – перший етап алгоритма – детально розглянута у роботах [1, 10], а саме – фізичні умови, математичне представлення – рівняння рівноваги, умови контакту, граничні умови, визначення геометрії та параметрів: (двозв’язне кільце границі якого мають форму лемніскадами Бута), розміри, матеріальні характеристики пружного півпростору, тип навантаження.



Рис. 1. Алгоритм розробки моделі контакту

У межах реалізації алгоритму моделювання виконано дискретизацію досліджуваної області методом скінченних елементів (див. рис. 2(а, в, д)), задано відповідні граничні умови та прикладено навантаження, що відповідає фізичній постановці задачі. Проведено симуляцію повної моделі. Здійснено оцінку впливу згущення сітки на розподіл напружено-деформівного стану та підтверджено відповідність отриманих даних очікуваній фізичній поведінці системи [1]. Статичний контактний аналіз проведено до досягнення збіжності чисельного рішення з прийнятним рівнем похибки.

Після проведення верифікації чисельних результатів, оцінки збіжності та коректності розв'язку, а також порівняння з аналітичними даними, наведеними у джерелах [1, 10], за умови досягнення задовільної відповідності, було здійснено перехід до етапу підготовки даних для подальшої обробки. Як зазначено у [12], деяка недостатня гнучкість вбудованих засобів постпроцесінгу та автоматизації в середовищі ANSYS ускладнює реалізацію нетипових обчислювальних сценаріїв. У зв'язку з цим результати чисельного моделювання, зокрема розподіли контактних напружень і переміщень, були експортовані у форматах, придатних для зовнішньої обробки (.xlsx), та імпортовані в MATLAB.

Подальший аналіз здійснено за допомогою спеціалізованого прикладного програмного забезпечення, розробленого авторами у середовищі MATLAB. Програмний модуль забезпечує розширену обробку чисельних даних, включаючи інтерполяцію, побудову згладжених поверхонь, фільтрацію за фізичними критеріями та багатопроєкційну візуалізацію.

Нижче подано приклад фрагментів коду мовою MATLAB для побудови ліній рівного тиску для різних формах поперечного перерізу штамп. На початку здійснюється зчитування даних з Excel-файлу. Після цього обчислюється діапазон координат, і на його основі створюється рівномірна сітка точок з невеликим запасом по краях. За допомогою функції `meshgrid` формується координатна сітка, яка слугує основою для побудови ліній рівного тиску:

```
filePath = 'B:\Aspirant\Data\Test1.xlsx';
data = readmatrix(filePath, 'Range', 'A:C');
X = data(:,1); Y = data(:,2); Z = data(:,3);
x_range = max(X) - min(X); y_range = max(Y) - min(Y);
xq = linspace(min(X) - 0.1*x_range, max(X) + 0.1*x_range, 500);
yq = linspace(min(Y) - 0.1*y_range, max(Y) + 0.1*y_range, 500);
[Xq, Yq] = meshgrid(xq, yq);
```

Застосування кубічної інтерполяції, дозволяє отримати гладку поверхню навіть при розріджених даних.

```
Zq = griddata(X, Y, Z, Xq, Yq, 'cubic');
k = boundary(X, Y, 1);
inBoundary = inpolygon(Xq, Yq, X(k), Y(k));
Zq(~inBoundary) = NaN;
```

Для зручності аналізу координати сітки відцентровано початок координат для кожного окремого випадку.

```
center_x = (max(X) + min(X)) / 2;
center_y = (max(Y) + min(Y)) / 2;
Xq_c = Xq - center_x;
Yq_c = Yq - center_y;
Zq_work = Zq;
maxZq = nanmax(Zq_work(:));
i0 = round(size(Zq_work,1)/4);
i1 = round(size(Zq_work,1)*3/4);
for j = i0:i1
    for i = i0:i1
        if Zq_work(i,j) > 0.15*maxZq
            Zq_work(i:end, j) = NaN;
        end
    end
end
```

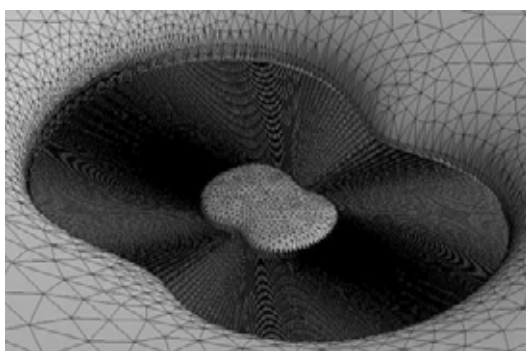
У наступному фрагменті наведено процес створення окремого графіка, де за допомогою функції `contour` будується 50 рівнів ліній рівного тиску для значень напруг `Zq_f`, відцентрованих відносно геометричного центру області (`Xq_c`, `Yq_c`). Застосовуючи команди `axis equal tight`, отримуємо коректне відображення осей та щільне розміщення графіка в межах вікна. Додавання координатних осей (`xlabel`, `ylabel`) робить графік більш інформативним для подальшого аналізу.

```

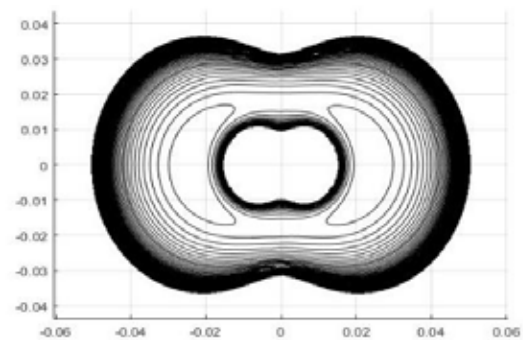
figure;
hold on;
grid on;
contour(Xq_c, Yq_c, Zq_f, 50, 'k', 'LineWidth', 0.3);
axis equal tight;
xlabel('X');
ylabel('Y');
hold off;

```

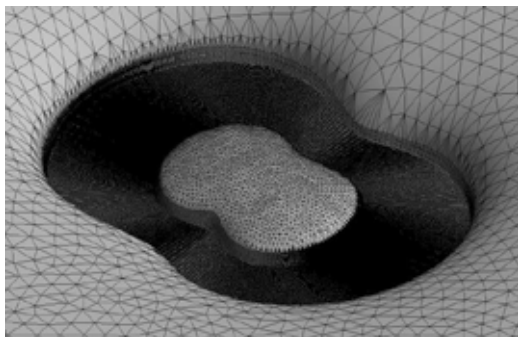
На рисунку 2 (а, в, д) представлено скінченно-елементні моделі пружного півпростору, на поверхню якого передається централізоване вертикальне навантаження через абсолютно жорсткий штамп. Геометрія штампa задана у вигляді двозв'язного кільця, обмеженого концентричними лемніскарами Бута. Розглянуто три варіанти моделей, що відповідають різним співвідношенням радіусів зовнішньої та внутрішньої межі кільця, а саме – а) 0,3; в) 0,5; д) 0,7. На відповідних рисунках 2 (б, г, є) наведено рівного рівного контактного тиску, що виникає під штампами. Таке порівняння дозволило простежити вплив геометричних параметрів на характер розподілу контактного тиску та формування зони взаємодії.



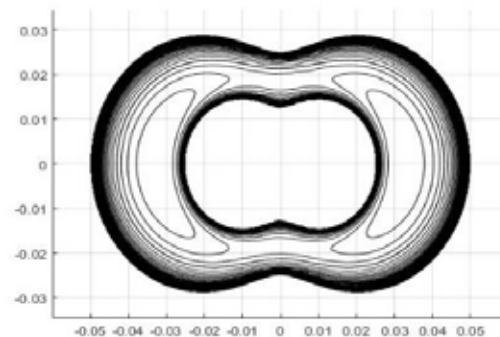
а)



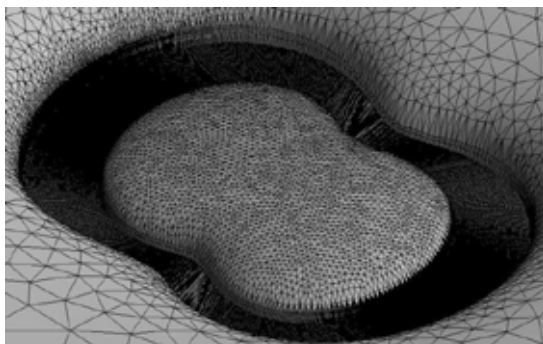
б)



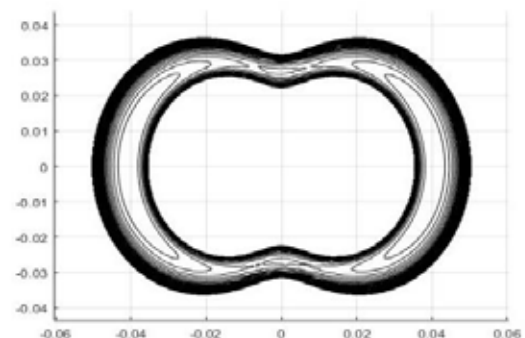
в)



г)



д)



е)

Рис. 2. Лінії рівного тиску (ізолінії) у зоні контакту

Таким чином, поєднання ANSYS і MATLAB дозволяє використовувати можливості ANSYS для побудови та розрахунку моделі контакту, а MATLAB – для подальшого ґрунтового аналізу та візуалізації даних. Як відзначають на офіційному сайті MathWorks, що такий підхід використовує сильні сторони кожної з програм: ANSYS для побудови структурної моделі, а MATLAB для алгоритму керування [2].

Висновки. У межах дослідження було створено спеціалізоване прикладне програмне забезпечення, реалізоване в середовищі MATLAB, призначене для автоматизованої обробки, аналізу та візуалізації результатів чисельного моделювання контактної взаємодії у задачах механіки деформівного твердого тіла. Програма функціонує як постпроцесор до розрахунків, виконаних у ANSYS, і забезпечує розширену інтерпретацію отриманих даних, що виходить за межі стандартних можливостей вбудованих засобів візуалізації. Основні функціональні компоненти програмного забезпечення включають:

- Імпорт чисельних даних у форматах.xlsx та.csv, що дозволяє інтегрувати результати скінченно-елементного аналізу з ANSYS.
- Автоматизовану фільтрацію даних з урахуванням геометричних обмежень та фізичних критеріїв, зокрема обмеження зони впливу навантаження.
- Генерацію багатопроеційних графічних представлень (приклади 3D-візуалізація, бічні та фронтальні проєкції у статті не приведені), що дозволяє здійснювати комплексний аналіз напружено-деформованого стану.

Загальні висновки:

- Реалізовано скінченно-елементну дискретизацію досліджуваної області в середовищі ANSYS, що дозволило здійснити чисельне моделювання напружено-деформованого стану з високим ступенем точності. Проведено аналіз збіжності чисельного рішення.

- Інтеграція ANSYS із MATLAB забезпечила розширення функціональних можливостей постпроцесінгу, зокрема в аспектах автоматизованої обробки чисельних даних, побудови згладжених поверхонь деформації, реалізації фільтраційних алгоритмів та багатопроеційної візуалізації. Такий підхід дозволив здійснити глибокий аналіз контактних напружень та переміщень у зоні взаємодії.

- Проведено дослідження впливу геометричних характеристик штампа (співвідношення радіусів внутрішньої та зовнішньої межі кільця) на характер розподілу контактної тиску. Встановлено, що зміна геометричних параметрів суттєво впливає на інтенсивність локальних напружень, що має важливе значення для оптимізації конструкцій у прикладних задачах.

- Розроблене програмне забезпечення, яке є модульним, масштабованим та адаптованим до задач різної складності. Його застосування дозволило підвищити ефективність постпроцесінгу, забезпечити гнучкість у побудові аналітичних сценаріїв та покращити якість візуального представлення результатів чисельного моделювання.

У перспективі передбачається розширення функціоналу за рахунок інтеграції алгоритмів глибинного навчання для автоматичної класифікації зон концентрації напружень та прогнозування поведінки контактних систем.

Список використаних джерел:

1. Зайцева Т. А., Шишканова Г. А. Розв'язання просторових контактних задач для неklasичних багатозв'язних областей. Дніпро: Вид-во ДНУ, 2011. 192 с.
2. Пандуранган, П. MATLAB Controller Linked to an ANSYS Structural Model for Directional Drilling Controller. MathWorks, 21.11.2021
3. Ansys Free Student Software Downloads. URL: <https://www.ansys.com/academic/freestudent-products> (дата звернення: 18.02.2022).
4. Babych S. Yu., Yaretska N. O. Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. 2021. Vol.57. P.297–305. DOI:10.1007/s10778-021-01081-7.
5. Barber J. R. Contact problems for the thin elastic layer. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1990. Vol. 32, No. 2. P. 129–132.
6. Bathe K. J. Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice Hall, 1982. URL: <https://www.scribd.com/document/359408011/FEA-Finite-Element-Procedures-by-K-J-Bathe-pdf>.
7. Bonet J., Wood R. D. Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis. Cambridge University Press, 2008.
8. Bower A. F. Applied Mechanics of Solids. CRC Press, 2010. URL: <https://pdfcoffee.com/applied-mechanics-of-solids-pdf-free.html>.
9. Cook R. D., Malkus D. S., Plesha M. E. Concepts and Applications of Finite Element Analysis. Wiley, 2002. URL: <https://pdfcoffee.com/robert-d-cook-david-s-malkus-michael-e-plesha-concepts-and-applications-of-finite-element-analysis-3rd-edition-1989-483-pdf-free.html>.
10. Honcharov, Y. A., T. A. Zaytseva. "Computer Simulation of the Interaction of a Doubly Bound in the Plane of a Punch and an Elastic Half-Space." *Problems of Applied Mathematics and Mathematical Modeling*. 2023. 23, 46–52. doi:10.15421/322331
11. Matlab. URL: <https://uk.mathworks.com/products/matlab/student.html> (дата звернення: 27.06.2022).
12. MR CFD. What is ANSYS? URL: <https://www.mr-cfd.com/whatisansys/#:~:text=that%20Ansys%20excels%20at,for%20an%20Ansys%20simulation%20run>

13. Nepelski K. 3D FEM Analysis of the Subsoil-Building Interaction. *Applied Sciences*. 2022. Vol.12, No.21, Article 10700. DOI:10.3390/app122110700.
14. Oliveira M. F. F., Dumont N. A., Selvadurai A. P. S. Boundary element formulation of axisymmetric problems for an elastic half-space. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2012. Vol.36, No.10. P.1478–1492. DOI:10.1016/j.enganabound.2012.03.015.
15. Shporta A. H. The asymptotic method in problems of the linear and nonlinear elasticity theory. *Natsional'nyi Hirnychiy Universytet. Naukovyi*. 2015. P. 76–81. URL: <https://nvngu.in.ua/index.php/uk/component/jdownloads/finish/54-03/8331-2015-03-shporta/>.
16. Shyshkanova G. A., Zaytseva T. A., Frydman A. D. The analysis of manufacturing errors effect on contact stresses distribution under the ring parts deformed asymmetrically. *Metallurgical and Mining Industry*. 2015. No. 7. P. 352–357. URL: www.metaljournal.com.ua/assets/Journal/englishedition/MMI_2015_7/055Shyshkanova-352-357.pdf.
17. Wang Q. J., Sun L., Zhang X., Liu S., Zhu D. FFT-Based Methods for Computational Contact Mechanics. *Frontiers in Mechanical Engineering*. 2020. Vol.6. DOI:10.3389/fmech.2020.00061.

References:

1. Zaytseva, T. A., & Shyshkanova, G. A. (2011). Rozv'iazannia prostorovykh kontaktnykh zadach dlia neklasychnykh bahatozv'iaznykh oblastei [Solution of Three-Dimensional Contact Problems for Nonclassical Multiply Connected Domains]. Dnipro: DNU Press, 192 p.
2. Pandurangan, P. (2021). MATLAB Controller Linked to an ANSYS Structural Model for Directional Drilling Controller. MathWorks, November 21, Retrieved from: <https://www.mathworks.com/videos/matlab-controller-linked-to-an-ansys-structural-model-for-directional-drilling-controller-1637577988890.html>
3. Ansys Free Student Software Downloads. Retrieved from: <https://www.ansys.com/academic/freestudent-products> (accessed: 18.02.2022).
4. Babych, S. Yu., & Yaretska, N. O. (2021). Contact problem for an elastic ring punch and a half-space with initial (residual) stresses. *International Applied Mechanics*, 57, 297–305. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01081-7>
5. Barber, J. R. (1990). Contact problems for the thin elastic layer. *International Journal of Mechanical Sciences*, 32(2), 129–132.
6. Bathe, K. J. (1982). Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice Hall. Retrieved from: <https://www.scribd.com/document/359408011/FEA-Finite-Element-Procedures-by-K-J-Bathe-pdf>
7. Bonet, J., & Wood, R. D. (2008). Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis. Cambridge University Press.
8. Bower, A. F. (2010). Applied Mechanics of Solids. CRC Press. Retrieved from: <https://pdfcoffee.com/applied-mechanics-of-solids-pdf-free.html>
9. Cook, R. D., Malkus, D. S., & Plesha, M. E. (2002). Concepts and Applications of Finite Element Analysis. Wiley. Retrieved from: <https://pdfcoffee.com/robert-d-cook-david-s-malkus-michael-e-plesha-concepts-and-applications-of-finite-element-analysis-3rd-edition-1989-483-pdf-free.html>
10. Honcharov, Y. A., T. A. Zaytseva. (2023). Computer Simulation of the Interaction of a Doubly Bound in the Plane of a Punch and an Elastic Half-Space. *Problems of Applied Mathematics and Mathematical Modeling*. 23, 46–52. doi:10.15421/32231.
11. Matlab. Retrieved from: <https://uk.mathworks.com/products/matlab/student.html> (дата звернення: 27.06.2022).
12. MR CFD. What is ANSYS? Retrieved from: <https://www.mr-cfd.com/what-is-ansys/#:~:text=that%20Ansys%20excels%20at,for%20an%20Ansys%20simulation%20run>
13. Nepelski, K. (2022). 3D FEM analysis of the subsoil-building interaction. *Applied Sciences*, 12(21), 10700. <https://doi.org/10.3390/app122110700>
14. Oliveira, M. F. F., Dumont, N. A., & Selvadurai, A. P. S. (2012). Boundary element formulation of axisymmetric problems for an elastic half-space. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36(10), 1478–1492. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2012.03.015>
15. Shporta, A. H. (2015). The asymptotic method in problems of the linear and nonlinear elasticity theory. *Natsionalnyi Hirnychiy Universytet. Naukovyi*, (3), 76–81. Retrieved from: <https://nvngu.in.ua/index.php/uk/component/jdownloads/finish/54-03/8331-2015-03-shporta/>
16. Shyshkanova, G. A., Zaytseva, T. A., & Frydman, A. D. (2015). The analysis of manufacturing errors effect on contact stresses distribution under the ring parts deformed asymmetrically. *Metallurgical and Mining Industry*, 7, 352–357. Retrieved from: www.metaljournal.com.ua/assets/Journal/englishedition/MMI_2015_7/055Shyshkanova-352-357.pdf
17. Wang, Q. J., Sun, L., Zhang, X., Liu, S., & Zhu, D. (2020). FFT-based methods for computational contact mechanics. *Frontiers in Mechanical Engineering*, 6. <https://doi.org/10.3389/fmech.2020.00061>

Дата надходження статті: 23.09.2025

Дата прийняття статті: 10.10.2025

Опубліковано: 30.12.2025