

УДК 52-17

DOI <https://doi.org/10.32782/2521-6643-2025-2-70.3>

Жир С. І., кандидат фізико-математичних наук,
доцент, доцент кафедри транспортних технологій та міжнародної
логістики Університету митної справи та фінансів
ORCID: 0009-0006-2410-6792

Кузьменко А. І., кандидат технічних наук,
доцент, завідувач кафедри транспортних технологій та
міжнародної логістики
Університету митної справи та фінансів
ORCID: 0000-0001-7278-3647

Гаврилов Б. О., студент спеціальності 275
Транспортні технології
Університету митної справи та фінансів
ORCID: 0009-0002-0443-6189

Шаповалов В. О., кандидат технічних наук наук,
старший науковий співробітник, доцент кафедри транспортних
технологій та міжнародної логістики
Університету митної справи та фінансів
ORCID: 0000-0001-8788-3771

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДОСТАВКИ ВАНТАЖУ НА ВЕЛИКІ ВІДСТАНІ ЗА ДОПОМОГОЮ СВІТЛОВИХ ВІТРИЛ

У статті досліджено перспективність використання технології світлових вітрил для доставки вантажів та супутників на великі відстані у космічному просторі. Розглянуто фізичні принципи дії світлового та лазерного вітрила, засновані на тиску світла, що створюється потоком фотонів. Проведено аналіз сучасного стану розробок у цій галузі, включаючи реальні місії (NASA Cosmos-1, LightSail, JAXA IKAROS), а також вивчено технічні та економічні виклики впровадження цієї технології в практичні космічні місії.

Метою дослідження є математичне моделювання процесу розгону супутника за допомогою фотонної, визначення основних обмежень та шляхів підвищення ефективності світлових вітрил. У роботі розглянуто особливості конструкції вітрил та матеріали для їх виготовлення (поліамід, графенові та металізовані покриття), а також способи зниження їх маси без втрати відбивної здатності. Наведено математичні залежності для визначення тиску світла, тяги, прискорення апарата, часу та енерговитрат для досягнення швидкості 0,1с. Показано, що при сумарній лазерній потужності 100 МВт супутник масою 2 кг може досягти цієї швидкості приблизно за 1045 діб, а необхідна енергія становить $\approx 2,5$ ТВт·год.

Окрема увага приділена економічним аспектам проекту: вартості енергоспоживання, будівництва лазерних установок, доцільності запуску малих супутників (наносупутників) замість великих апаратів. Розглянуто варіанти гальмування міжзоряного апарата та можливість створення систем дзеркал для відбиття лазерного променя з протилежного боку траєкторії.

Проаналізовано потенційні ризики, пов'язані з пилом та мікрометеоритами у космосі, та запропоновано альтернативні рішення захисту апарата, зокрема використання розсіювальних лінз замість броні. Також наведено концепцію використання тепла від лазерного випромінювання для живлення іонних двигунів, що можуть виконувати корекцію траєкторії.

У дослідженні зроблено висновок, що технологія світлових вітрил може стати основою для створення міжпланетних та міжзоряних транспортних систем. За умови масштабної підтримки, розвитку лазерної інфраструктури та матеріалознавства, можливим стає формування космічних світлових магістралей для перевезення вантажів та наукових місій. Технологія поєднує екологічність, низьку витратність палива та високий потенціал швидкостей, що робить її одним із найперспективніших напрямів сучасної космічної логістики.

Ключові слова: математичне моделювання, світлове вітрило, фотонний тиск, лазерне прискорення, супутники, космічна логістика.

© С. І. Жир, А. І. Кузьменко, Б. О. Гаврилов, В. О. Шаповалов, 2025

Стаття поширюється на умовах ліцензії CC BY 4.0

Zhyr S. I., Kuzmenko A. I., Gavrilov B. O., Shapovalov V. O. Mathematical modeling of cargo delivery over long distances using light sails

The article examines the prospects of using light sail technology for the delivery of cargo and satellites over long distances in outer space. The physical principles of the light and laser sail, based on the pressure of light created by the flow of photons, are considered. An analysis of the current state of development in this field, including real missions (NASA Cosmos-1, LightSail, JAXA IKAROS), was conducted, as well as the technical and economic challenges of implementing this technology in practical space missions were studied.

The purpose of the research is mathematical modeling of the process of acceleration of the satellite with the help of photons, determination of the main limitations and ways of increasing the efficiency of light sails. The article examines the features of sail design and materials for their manufacture (polyamide, graphene, and metallized coatings), as well as ways to reduce their weight without losing reflectivity. Mathematical dependences for determining the pressure of light, traction, acceleration of the device, time and energy consumption to achieve a speed of 0.1c are given. It is shown that with a total laser power of 100 MW, a 2 kg satellite can reach this speed in approximately 1045 days, and the required energy is ≈ 2.5 TWh.

Special attention is paid to the economic aspects of the project: the cost of energy consumption, the construction of laser installations, the expediency of launching small satellites (nano-satellites) instead of large devices. Options for braking the interstellar vehicle and the possibility of creating mirror systems to reflect the laser beam from the opposite side of the trajectory are considered.

The potential risks associated with dust and micrometeorites in space were analyzed and alternative solutions for the protection of the device were proposed, including the use of dispersive lenses instead of armor. Also presented is the concept of using heat from laser radiation to power ion engines that can perform trajectory correction.

The study concluded that the technology of light sails can become the basis for the creation of interplanetary and interstellar transport systems. Under the condition of large-scale support, development of laser infrastructure and materials science, the formation of cosmic light highways for cargo transportation and scientific missions becomes possible. The technology combines environmental friendliness, low fuel consumption and high speed potential, which makes it one of the most promising areas of modern space logistics.

Key words: mathematical modeling, light sail, photon pressure, laser acceleration, satellites, space logistics.

Математичні моделі – це моделі подібності у поведінці з оригіналом. Математичною моделлю будь-якого об'єкта називають опис його поведінки на будь-якій формальній мові, яка дозволяє визначити його основні характеристики. Як правило, математичні моделі використовують мову диференціальних рівнянь. При цьому процес функціонування об'єкта розглядається у деякому інтервалі часу, а його стан у кожний момент часу задається набором параметрів, які характеризують його поведінку. На різних етапах дослідження об'єкта математична модель може змінюватися залежно від урахування параметрів, які впливають на поведінку об'єкта.

На сьогоднішній час математичне моделювання використовується для проведення експериментів і чисельної оцінки параметрів об'єкта. Цей метод передбачає побудову діючої математичної моделі об'єкта, яка має властивості, подібні властивостям і співвідношенням реального об'єкта (оригіналу). При цьому виникає можливість імітувати роботу об'єкта у широкому діапазоні умов і приймати рішення відносно оптимізації його характеристик.

Вибираючи модель, необхідно перш за все урахувати основні характеристики і параметри об'єкта, при цьому математична модель повинна бути відносно простою і зрозумілою для тих, хто її використовує, і достатньо складною, щоб з необхідним ступенем точності відображати об'єкт, який вивчається.

У цій роботі виконано математичне моделювання технології застосування світлових вітрил з метою визначення подальших перспектив та практичної корисності. Також моделювання охоплює економічну складову.

Постановка проблеми. На даний момент дослідження космічного простору є дуже важливим науковим питанням, що сприяє розвитку людства. Політ у космосі зараз ще дуже дорогий, хоча й досить затребуваний. В цьому питанні важлива як доступність, так і швидкість переміщення в просторі. Бо чим кращі ці параметри тим вигідніше буде транспорт для стратегічних місій.

Так само важлива надійність і простота реалізації технології, що допоможе пришвидшити розробку та випробування нових ідей й зменшення витрат на створення нового транспорту. Це означає використання добре вивчених методів, які можливо поєднати між собою, що допоможе реалізувати нові рішення вже найближчим часом.

Не менш важливим аспектом є економічна складова у нових проектах. У світі йде постійне посилення правил та оптимізації бюджету та відповідно стимулювання до зменшення ризиків, які потрібно враховувати при розробці нових планів та концепцій. Це означає що важливо прорахувати і оптимізувати усі ризики та потенційні витрати до початку розробки транспорту.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. За останні роки було здійснено декілька запусків супутників зі схожою технологією, що означає підвищений інтерес до даного процесу. Поточні дослідження ведуться в межах сонячної системи, що дозволяє добре освоїти нову технологію. Завдяки подібним місіям вчені зібрали чимало нових даних, які дозволять доповнити конструкцію вітрила і вивчити найближчі до Землі планети.

Існують різні компанії, які розробляли і запускали такі зонди. Такі компанії як: NASA, LightSail, JAXA(IKAROS) досягли успіху в розвитку цієї технології. Компанія NASA була першою хто запустив зонд з світловим парусом. Це був «Космос-1».

«Космос-1» (Cosmos 1) – спільний російсько-американський проект із запуску космічного апарату, що рухається за принципом сонячного вітрильника. Супутник був сконструйований у НУО імені Лавочкина на замовлення Планетарного товариства США. Мета експерименту полягає у дослідженні принципу польоту з використанням сонячного вітрила під впливом сонячного вітру та сонячного світла. На орбіті передбачалося досліджувати можливості сонячного вітрила як тягової системи, і навіть засоби управління апаратом у космосі. У разі успішного виходу на орбіту супутник мав розгорнути «сонячне вітрило», що складається з восьми пелюсток загальним діаметром 30 метрів [1].

IKAROS (англ. Interplanetary Kite-Craft Accelerated by Radiation Of the Sun) – японський космічний апарат із сонячним вітрилом, створений Японським агентством аерокосмічних досліджень (JAXA) [2].

Апарат призначений для випробування сонячного вітрила. Висновок було здійснено попутно з КА «Акацукі», призначеним вивчення Венери, на ракеті Н-ІІА. Розкриття сонячного вітрила розпочалося 3 червня 2010 року, а 10 червня успішно завершилось. За кадрами, переданими з борту IKAROS, можна дійти невтішного висновку, що це 200 квадратних метрів ультратонкого полотна розправилися успішно, а тонкоплівкові сонячні батареї почали виробляти енергію. Завдання-мінімум місії полягало у розкритті вітрила, а завдання-максимум полягало в тому, щоб навчити вітрильник регулювати швидкість та напрямок залежно від сонячного випромінювання. Обидві завдання були успішно виконані, і розпочалася додаткова програма [3].

LightSail – це проект демонстрації керованого сонячного вітрила на низькій навколоземній орбіті з використанням кубсату. Проект був розроблений Планетарним суспільством, глобальною некомерційною організацією, що займається дослідженням космосу [4].

LightSail 2 (COSPAR 2019-036AC) був кубсатом, оснащеним сонячним вітрилом розміром з боксерський ринг, площею 32 м² (340 кв. футів). Вітрило вловлювало фотони, що приходять від Сонця, подібно до того, як вітрове вітрило вловлює рухомі молекули повітря, щоб приводити космічний апарат в рух. LightSail 2 був запущений 25 червня 2019 і виведений на орбіту супутником-носієм Prox-1 на набагато більш високу низьку навколоземну орбіту, ніж LightSail 1, на орбітальну висоту більше 720 км (450 миль). Він мав продемонструвати кероване сонячне вітрило на низькій навколоземній орбіті. Керуючи орієнтацією вітрила щодо Сонця, льотна група сподівалася підняти апогей орбіти та збільшити орбітальну енергію після розкриття вітрила. Prox-1 і LightSail 2 були вторинними корисними навантаженнями на борту другого робочого запуску SpaceX Falcon Heavy, який ніс корисне навантаження STP-2 для ВПС США. Дослідники отримали перші фотографії з LightSail 2 7 липня 2019, а його сонячні вітрила були розгорнуті 23 липня 2019 року. 31 липня 2019 Планетарне суспільство заявило, що їм вдалося підняти орбіту LightSail 2 на вимірну величину, хоча він і провів значну частину свого часу, безладно перекидаючись. LightSail 2 успішно продемонстрував рух за допомогою сонячного вітрила [4].

Метою статті є математичне моделювання процесу розгону супутника за допомогою фотонів, визначення основних обмежень та шляхів підвищення ефективності світлових вітрил. Для досягнення мети необхідно розв'язати такі завдання: розібрати принцип дії світлових вітрил, а також лазерного потоку фотонів; визначити конструкцію; виконати математичне моделювання процесу розгону супутника.

Виклад основного матеріалу дослідження. Багато досліджень зараз проводять у нашому світі та в найближчому космічному просторі в пошуках чогось нового або удосконалення існуючого. Разом з тим, вчені працюють над великими масштабнішими проектами. Однією з найреалістичніших і найперспективніших технологій є світлові вітрила. Прототипом їх можна вважати сонячні вітрила.

Принцип дії сонячного вітрила (його називають ще «фотонне вітрило») заснований на поширенні сонячного світла у просторі. Як відомо, світло складається з фотонів, які самі собою позбавлені маси. Утім, рухаючись через простір, фотони несуть імпульс. Саме цей фотонний імпульс і передається відбивальній поверхні сонячного вітрила в момент попадання на нього світла (див. рис. 1). Сам по собі імпульс, який несуть у собі фотони, досить слабкий, проте тут сонячному вітрилу стають у пригоді умови середовища, в якому воно здійснює рух.

Космічний вакуум має нульовий опір, внаслідок чого навіть слабка сила світла здатна визначити космічному апарату потрібний вектор прискорення. До того ж прискорення космічного корабля, обладнаного сонячним вітрилом, постійно збільшуватиметься під впливом сонячного світла. Це означає, що оснащені сонячним вітрилом апарати можуть досягати швидкостей, не підвладних сьогодиншній ракетній техніці, що працює на хімічному паливі, водночас використовуючи для своїх цілей повністю відновлюване джерело енергії [5].

Конструкція для забезпечення належного прискорення сонячне вітрило має бути із надлегких матеріалів. На сьогодні найоптимальнішими рішеннями є виготовлення їх із майлару (BoPET від Biaxially-oriented polyethylene terephthalate) та полііміду (PI). Важливе й нанесення на ці матеріали покриття (часто з алюмінію та його сплавів), яке перешкоджатиме проходженню фотонів крізь вітрило, оскільки цей процес може призвести до втрати космічним апаратом свого прискорення.

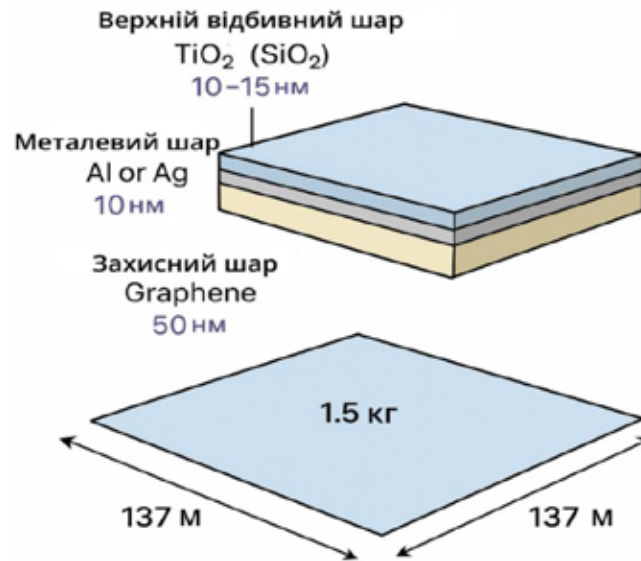


Рис. 1. Схема передавання фотонами імпульсу сонячному вітрилу

Ще одним показником, що безпосередньо впливає на швидкість, яку може розвинути сонячне вітрило, є розміри і товщина його відбивального покриття. Мінімальної межі тут не існує, та що меншим за площею воно буде, то більше часу знадобиться вітрилу на розвиток швидкостей, необхідних для космічних подорожей. Важливим є й грамотно вивірене співвідношення маси космічного апарата з площею його сонячного вітрила. Тому для досягнення оптимальних характеристик швидкості, яку може розвинути фотонне вітрило, інженери або збільшують площу поверхні вітрила, що відбиває, або намагаються зменшити масу космічного апарата, до якого воно буде прикріплене. Також важливо захистити супутник від радіації та врахувати, скільки маси супутника буде на це витрачено.

Основні варіанти покриттів:

1. Каптон з алюмінієвим напilenням (MLI-ізоляція) – стандарт у супутниках. Щільність $\sim 100\text{--}200\text{ г/м}^2$ (з урахуванням багатошаровості).

2. Арамідна тканина (кевлар) з алюмінієвим шаром – щільність $150\text{--}300\text{ г/м}^2$.

3. Поліетилен високої щільності (HDPE, UHMWPE) – хороший захист від протонів, $\sim 200\text{--}400\text{ г/м}^2$ при тонкому покритті.

4. Тонка берилієва або алюмінієва фольга – легка, але крихка. $\sim 50\text{--}150\text{ г/м}^2$.

Вага покриття супутника представлена в таблиці 1.

Таблиця 1

Вага покриття

Матеріал покриття	Питома маса (г/м ²)	Наносупутник (до 10 кг)	Малий супутник (до 50 кг)	Середній (до 200 кг)	Примітка
MLI (каптон + алюміній)	100–200	0,15–0,30 кг	0,75–1,5 кг	3–6 кг	Стандартна термо- та радіаційна ізоляція
Кевлар + алюмінізація	150–300	0,23–0,45 кг	1,1–2,3 кг	4,5–9 кг	Стійка до мікрометеоритів
UHMWPE (поліетилен високої щільності)	200–400	0,3–0,6 кг	1,5–3 кг	6–12 кг	Гарний захист від протонів
Алюмінієва фольга (тонка)	50–150	0,075–0,23 кг	0,38–1,1 кг	1,5–4,5 кг	Легка, але крихка
Базальтове волокно з напilenням	250–500	0,38–0,75 кг	1,9–3,8 кг	7,5–15 кг	Термо- та радіаційно-стійкий композит

Проблемою також є той факт, що тиск сонячного світла у міру віддалення від Сонця слабшає, тож, очевидно, не зможе бути наданим достатній розгін космічного транспортного засобу. Ця проблема може бути вирішена шляхом застосуванням лазерів, заснованих на використанні ядерних установок.

Фізичною основою роботи лазера є явище вимушеного (індукованого) випромінювання. Суть явища у тому, що збуджений атом (чи інша квантова система) здатний випромінювати фотон під впливом іншого фотона без його поглинання, якщо енергія останнього дорівнює різниці енергій рівнів атома до і після випромінювання. При цьому випромінюваний фотон когерентний фотону, що викликав випромінювання (є його «точною копією»). У такий спосіб відбувається посилення світла. Цим явище відрізняється від спонтанного випромінювання, в якому випромінювані фотони мають випадкові напрямки поширення, поляризацію та фазу.

Імовірність того, що випадковий фотон викликає індуковане випромінювання збудженого атома, точно дорівнює ймовірності поглинання цього фотона атомом, що знаходиться в незбудженому стані. Тому посилення світла необхідно, щоб збуджених атомів серед було більше, ніж незбуджених (так звана інверсія населеностей). У стані термодинамічної рівноваги ця умова не виконується, тому використовуються різні системи накачування активного середовища лазера.

У даний час як робоче середовище лазера використовуються різні агрегатні стани речовини: твердий, рідкий, газоподібний, плазма. У звичайному стані кількість атомів, що знаходяться на збуджених енергетичних рівнях, визначається розподілом Больцмана:

$$N = N0 \exp(-E / kT) \quad (1)$$

де N – число атомів, що у збудженому стані з енергією E ;

$N0$ – число атомів, що у основному стані (енергія дорівнює нуль);

k – стала Больцмана;

T – температура середовища.

Інакше кажучи, таких атомів, які у збудженому стані, менше, ніж у основному, тому ймовірність того, що фотон, поширюючись у середовищі, викличе вимушене випромінювання, також мала порівняно з ймовірністю його поглинання. Тому електромагнітна хвиля, проходячи речовиною, витрачає свою енергію на збудження атомів. Інтенсивність випромінювання розраховується за законом Бугера:

$$I_1 = I0 \exp(-a1 \cdot l) \quad (2)$$

де $I0$ – початкова інтенсивність;

I_1 – інтенсивність випромінювання, що пройшло відстань l у речовині;

$a1$ – показник поглинання речовини.

Оскільки експоненційна залежність, випромінювання дуже швидко поглинається.

У тому випадку, коли кількість збуджених атомів більша, ніж не збуджених (тобто у стані інверсії населення), ситуація прямо протилежна. Акти вимушеного випромінювання переважають над поглинанням, і випромінювання посилюється згідно із законом:

$$I_1 = I0 \exp(a2 \cdot l) \quad (3)$$

де $a2$ – коефіцієнт квантового посилення.

У реальних лазерах посилення відбувається до того часу, поки величина що надходить рахунок вимушеного випромінювання енергії стане рівної величині енергії, що втрачається в резонаторі. Ці втрати пов'язані з насиченням метастабільного рівня робочої речовини, після чого енергія накачування йде тільки на його розігрів, а також з наявністю безлічі інших факторів (розсіювання на неоднорідностях середовища, поглинання домішками, неідеальність дзеркал, що відображають, корисне і небажане випромінювання в навколишнє).

Класична трирівнева система накачування робочого середовища використовується, наприклад, у рубіновому лазері. Рубін є кристалом корунду Al_2O_3 , легований невеликою кількістю іонів хрому Cr^{3+} , які і є джерелом лазерного випромінювання. Через вплив електричного поля кристалічних ґрат корунду зовнішній енергетичний рівень хрому $E2$ розщеплений (див. ефект Штарка). Саме це уможливило використання монохроматичного випромінювання як накачування. При цьому атом переходить з основного стану з енергією $E0$ у збуджений з енергією $E2$. У цьому стані атом може бути порівняно недовго (порядку 10^{-8} с), майже відразу відбувається безвипромінювальний перехід на рівень $E1$, на якому атом може перебувати значно довше (до 10^{-3} с), це так званий метастабільний рівень. Виникає можливість здійснення індукованого випромінювання під впливом інших випадкових фотонів. Щойно атомів, що у метастабільному стані, стає більше, ніж у основному, починається процес генерації.

Попередні дослідження світлових вітрил показали, що використання конструкції фотонного кристала, по суті, обшивання "тканини" вітрила рівномірно розташованими отворами, дозволить максимально збільшити теплове випромінювання конструкції. Нова робота дослідників додає ще один шар періодичності: зразки вітрильної тканини, зшиті разом у сітку [6].

Завдяки тому, що відстань між отворами відповідає довжині хвилі світла, а відстань між зразками відповідає довжині хвилі теплового випромінювання, вітрило може витримати ще більш потужний початковий поштовх, скоротивши час, який лазерам знадобиться, щоб залишатися на своїй цілі. Але є ще багато проблем, які потребують відповідних рішень. Для роботи над ними спочатку необхідно роз'яснити, звідки береться тиск світла.

Методи зниження маси – це ультратонкі шари: діелектрик 10–15 нм, метал 10 нм, захисний шар 50 нм → зниження маси на 50–60%. Надлегкі матеріали: захисний шар графен або аерогель → щільність до 200–400 кг/м³ → зниження маси шару на 70%. Метал можна замінити на багатошаровий діелектрик → зменшення маси на 50%.

Структурна оптимізація: Перфороване або сітчасте вітрило → зниження маси 20–30% без втрати відбиття.

Світло це за своєю природою – електромагнітна хвиля. Світло на поверхню падає порціями: фотонами. І хоч самі фотони не маю маси, але тиск вони можуть чинити, адже будь-яка електромагнітна хвиля повинна чинити тиск, це випливає з магнітної теорії Максвелла. Для обчислення тиску світла за нормального падіння випромінювання і відсутності розсіювання можна скористатися формулою [6]:

$$P_R = P_r = \frac{(1+a)I}{c}, \quad (4)$$

Цю формулу можемо розписати як:

$$P = \frac{I}{C}(1-k+p), \quad (5)$$

де I – інтенсивність падаючого випромінювання (Вт/м²);

C – швидкість світла (км/год),

k – коефіцієнт пропускання,

p – коефіцієнт відбиття.

Саме вітрило представляє тонкий лист із графену, вкритий відбивним матеріалом, таким як золото або срібло. Але оскільки цей лист буде сильно нагріватися, пропонується використовувати мікроструктури, які зможуть ефективно розподіляти енергію світлового пучка. Саме полотно буде в товщину приблизно 100 атомів.

На сьогодні існує багато проблем щодо виведення супутника на орбіту планети, яка цікавить науковців. Але багато з цих проблем вже має свої рішення. Перше, про що варто поговорити, це сам розгін. Так, можна розігнати апарат до 10-20% швидкості світла [8].

На думку авторів, найперспективніше буде надати початкової швидкості завдяки запуску ракетних установок із землі. Багато ракет здатні розігнатися до швидкості 44 000 км/год. Можна і швидше, але візьмо це число за основу. Тепер нам потрібно порахувати, скільки потрібно витратити енергії, щоб з цієї швидкості розігнати світлове вітрило до 15% швидкості світла. Перспективним є застосування лазерних установок для подібної місії, адже світло сонця на великій відстані вже не буде діяти належним чином, а лазером можна буде дістати і до іншої зірки. Розрахувати, скільки потрібно енергії витратити на 1 кг вантажу світлового вітрила, можна буде просто помноживши отримане число на вагу апарату, за умов використання подібної лазерної установки.

Одні з найпотужніших лазерних установок можуть переробляти від 1 до 5 мегават на день на лазерний потік фотонів. Для подібної місії можна буде в полі на 2-х протилежних півкулях землі розташувати лазерні установки в розмірі 100 штук. Ці установки можна використовувати усі разом, або по чергову, а також змінювати за необхідності місце розташування (наприклад, якщо їх роботі буде заважати обертання планети), або ж зупиняти одну з них і вмикати іншу для техобслуговування. Звісно, це дуже затратно, але зараз цю проблематику активно обговорюють, і поки є науковий інтерес і залученість бізнесу до даних проєктів, можна буде знайти потрібні кошти. Для цього потрібно довести, що впровадження подібної технології буде вигідним для в'язого людства, на кшталт виведення першого супутника на орбіту планети [8].

Якщо відомо, скільки енергії споживають 100 установок, а імовірно саме стільки працюватимуть одночасно, можна розрахувати, скільки піде часу на розгін до 10% швидкості світла [8]:

1. Тяга світлового (фотонного) вітрила знаходиться за формулою фотонної тяги (з променевого тиску $p=\xi I/c$):

$$F = \frac{\xi P}{c}, \quad (6)$$

де P – оптична потужність променя,

c – швидкість світла,

ξ – коефіцієнт відбиття імпульсу: $\xi=2$ для ідеально дзеркального вітрила, $\xi=1$ для повністю поглинаючого [9].

2. Прискорення апарата від світлової тяги знаходиться за формулою рівняння прискорення (другий закон Ньютона з фотонною тягою) [10]:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{\xi P}{mc} \quad (7)$$

де m – маса апарата.

3. Фактор Лоренца при цільовій швидкості знаходиться за формулою релятивістського множника (фактор Лоренца) [11]:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (8)$$

Для $v = 0,1$ швидкості світла отримуємо $\gamma \approx 1,005$.

4. Час розгону до заданої швидкості (постійна тяга, мала релятивістська поправка) знаходиться за формулою час розгону під постійною світловою тягою [12]:

$$t = \frac{\gamma m v c}{\xi P} \quad (9)$$

При $v=0,1$ швидкості світла це дає кращий відсоток точності.

5. Пройдена дистанція за час розгону знаходиться за формулою шляху при рівнозмінному розгоні [13]:

$$S = \frac{1}{2} v t \quad (10)$$

6. Кінетична енергія знаходиться за формулою релятивістської кінетичної енергії [14]:

$$E_k = (\gamma - 1) m c^2 \quad (11)$$

7. Випромінена енергія лазерів за час розгону визначається за формулою енергетичного балансу випромінювача [15]:

$$E_{\text{laser}} = P t \quad (12)$$

Фотонна тяга при нормальному падінні променя:

$$F = \frac{\xi P}{c} \quad (13)$$

Прискорення апарату масою m :

$$a = \frac{F}{m} = \frac{\xi P}{m c} \quad (14)$$

Час розгону до швидкості v (коректно з урахуванням релятивістського γ при $0,1c$ це $+0,5\%$ до часу):

$$F = \frac{\gamma m v c}{\xi P}; \quad \gamma = \frac{\xi P}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (15)$$

Далі виконаємо математичне моделювання для релятивістської динаміки світлового вітрила. Докладне пояснення стосуються наступних моментів.

Імпульс релятивістського тіла:

$$p = \gamma * m * v, \text{ де } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (16)$$

Постійна сила:

$$F = \frac{dp}{dt} \Rightarrow p(t) = F t \text{ (якщо } p(0)=0). \quad (17)$$

Отже:

$$\gamma m v = F t \Rightarrow v(t) = \left(\frac{F t}{m} \right) / \sqrt{1 + \left(\frac{F t}{m c} \right)^2}. \quad (18)$$

Прискорення:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m \gamma^3}. \quad (19)$$

Далі виконаємо апроксимацію: Ньютонівська межа ($F t \ll m c$): $v \approx (F/m) t$ – лінійне зростання швидкості. Релятивістська межа ($v \rightarrow c$): $v \rightarrow c$ асимптотично, $a \propto 1/\gamma^3 \rightarrow 0$.

Для наочності рорзв'яжемо чисельні приклади ($P=100$ МВт, $\xi=2$).

Параметри:

$$P=100 \cdot 10^6 \text{ Вт}, \xi=2 \Rightarrow F=\frac{\xi P}{c} \approx 0.6667 \text{ Н}. \quad (20)$$

Для $m = 1 \text{ кг}$:

$$a_{\text{newt}} = F/m \approx 0.6667 \text{ м/с}^2. \quad (21)$$

Ньютонівський час до

$$v = 0.1 \text{ с: } t_{\text{newt}} = \frac{v}{a} \approx 4.5 \cdot 10^7 \text{ с} \approx 522.7 \text{ діб} \approx 1.43 \text{ р} \quad (22)$$

Релятивістський фактор при $v = 0.1 \text{ с}$: $\gamma \approx 1.0050378 \Rightarrow t_{\text{rel}} \approx \gamma t_{\text{newt}} \approx +0.5038\%$ від t_{newt} .

Зменшення прискорення при $v = 0.1 \text{ с}$: $\gamma^3 \approx 1.0152 \Rightarrow a_{\text{rel}} \approx a_{\text{newt}} / 1.0152 \approx \text{зменшення} \approx 1.5\%$.

З отриманих розрахунків можна отримати практичні висновки:

1. До $\sim 0.1 \text{ с}$ релятивістські ефекти невеликі: можна використовувати ньютонівську модель з точністю близько відсотка.

2. При швидкостях $\geq 0.3 \text{ с}$ ефекти стають істотними: потрібен релятивістський розрахунок, і розження-ючі зусилля зростають швидше, ніж у простому ньютонівському наближенні.

3. Технічні обмеження (фокусування променя, нагрівання, міцність вітрила) часто важливіші за релятивістські поправки при практичному проектуванні.

Для цільового $v=0.1 \text{ с}$ ($\gamma \approx 1.005$) і $P = 100 \text{ МВт}$.

$$t \approx 4.51 \cdot 10^7 \text{ с} \cdot 6 \frac{\text{м}}{1 \text{ кг}} = 522.7 \text{ с} \cdot \frac{\text{м}}{1 \text{ кг}} = 1.431 \text{ год} \cdot \frac{\text{м}}{1 \text{ кг}} \quad (23)$$

Залежність параметрів променів від маси наведено на рисунку 2, а розрахункову кількість енергії для розгону – в таблиці 2.

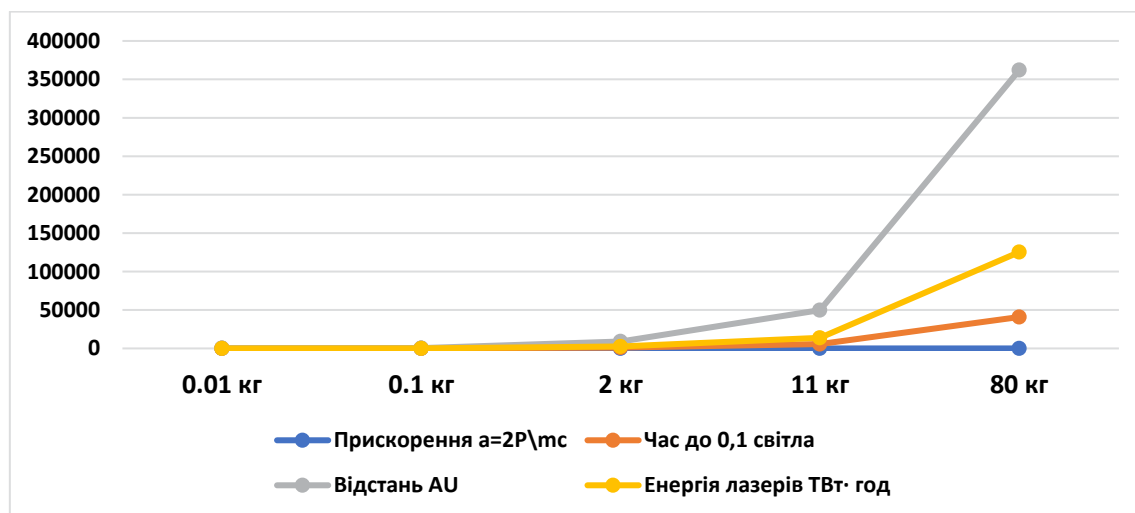


Рис. 2. Залежність параметрів променів від маси (кг)

Таблиця 2

Розрахунок кількості енергії для розгону

Маса m	Прискорення $a=2P/mc$	Час до 0,1с	Відстань $s \approx 1/2 v t$	Енергія лазерів $E=Pt$
0.01 кг	66,7 м/с ²	5,23 діб	$\approx 45,3 \text{ AU}$	$4,52 \times 10^{13} \text{ Дж} \approx 12 \text{ 544 МВт} \cdot \text{год}$ ($\approx 12,54 \text{ ГВт} \cdot \text{год}$)
0.1 кг	6,67 м/с ²	52,3 діб	$\approx 452 \text{ AU}$	$4,52 \times 10^{14} \text{ Дж} \approx 125 \text{ 444 МВт} \cdot \text{год}$ ($\approx 125,44 \text{ ГВт} \cdot \text{год}$)
2 кг	0,3335 м/с ²	1045 діб	$\approx 9 \text{ 050 AU}$	$4,52 \times 10^{15} \text{ Дж} \approx 2 \text{ 508 888 МВт} \cdot \text{год}$ ($\approx 2,508 \text{ ТВт} \cdot \text{год}$)
11 кг	0,0600 м/с ²	5621 діб	$\approx 49 \text{ 779 AU}$	$4,52 \times 10^{16} \text{ Дж} \approx 13 \text{ 798 884 МВт} \cdot \text{год}$ ($\approx 13,798 \text{ ТВт} \cdot \text{год}$)
80 кг	0,005336 м/с ²	40880 діб	$\approx 362 \text{ 033 AU}$	$4,52 \times 10^{17} \text{ Дж} \approx 100 \text{ 355 300 МВт} \cdot \text{год}$ ($\approx 125,36 \text{ ТВт} \cdot \text{год}$)

В таблиці 2 прийнято, що AU-астрономічна одиниця (відстань між землею та сонцем).

Результат: із загальною оптичною потужністю 100 МВт і вітрилом з ідеальним відображенням час до 0,1 становить приблизно 1,43 року на кілограм маси (лінійно згідно з m). Для 10 г – близько 5,2 доби, для 1 г – близько 12,5 годин. Вартість з урахуванням оптової поставки енергії показана в (табл. 3).

Таблиця 3

Вартість з урахуванням оптової поставки енергії

Маса	Енергія лазерів (МВт·/ год)	Вартість при 0,1 \$/кВт· год
0.01 кг	12 544	1 254 400 \$
0.1 кг	125 444	11 289 400 \$
2 кг	2 508 888	160 407 888 \$
11 кг	13 798 884	910 559 218 \$
80 кг	100 355 300	5 500 355 300 \$

Оцінка вартості однієї установки (фазове комбінування, повна наземна станція) наступна.

Причина: потрібен лазерний модуль плюс потужні блоки живлення, тепловідвід, система фазового комбінування, директор, управління, інженерна інтеграція.

Оцінка: $\approx$ \$30–150 млн за 1 МВт. (враховує, що промислова збірка МВт-класу і beam-director значно дорожчі за прості модулі; ближче до поточних контрактних рівнів і цін на телескопічні системи).

Враховуючи отримані дані можна зробити висновок, що вплив буде оказувати тільки масштабність та вигода проекту на вартість запуску (залежність показана на рис 2).

За результатами моделювання можна зробити висновок, що за рівних умов найвигідніше буде запустити багато нано супутників, які важать близько 2 кілограмів, замість одного великого, бо розігнати та зупинити малий супутник можливо швидше ніж великий. Це означає що більшу частину у просторі супутник буде летіти з максимальною швидкістю.

У середньому невеликий супутник (наносупутник) важить навіть менше ніж 10 кг згідно [9], вага вітрил буде незначною. Якщо при цьому ми припустимо, що втрати будуть близько 10%, то нам знадобиться 2 508 888 МВт енергії за час розгону витратити на цей проєкт. Це буде коштувати приблизно 160 407 888 \$ Для порівняння Україна споживає на рік 112,7 тераватт-часов. Так це великі цифри але варто розуміти що розгін може бути не таким різким, а річ йде про около світові швидкості.

Але це буквально тільки півдороги, адже нам ще потрібно ще трохи менше енергії, щоб загальмувати цю установку. Але тут виникає питання, як це можна зробити. Адже в такому разі нам потрібні подібні установки вже з іншого боку. Ну взагалі це не обов'язково, є й інший шлях для гальмування. Він важчий для реалізації, ніж просто розігнати цільну установку. Але в разі успішного гальмування ми зможемо вивести супутник на орбіту планети або зірки, яка знаходиться дуже далеко від нас. І це набагато вигідніше, ніж просто з навколосвітловою швидкістю пролетіти повз велику кількість можливостей [8].

Для реалізації проєкту можливо, крім супутника, взяти ще одну відбивну установку, яка буде відокремлена від основного вантажу або запустити окремий супутник, для того, щоб відбити лазерний потік фотонів уже з іншого боку. Але така установка має бути вагою як мінімум такою самою, як і основний вантаж. На неї перед відділенням можна буде завантажити вже непотрібне обладнання, яке вже відпрацювало або вийшло з ладу, для полегшення основного супутника. Це означає, що вага такого корабля вже становитиме приблизно на 90% більше, ніж початкова. За рахунок того, що ми збільшимо витрати в 2 рази, ми отримаємо в десятки разів більше зібраної інформації з супутника, який має шанси вийти на орбіту за таких умов [8].

Однак запустити цю установку з такою точністю практично неможливо, що зупиняє багатьох науковців, які це розуміють. Але коригувальні іонні двигуни дуже економічні та будуть отримувати енергію від нагрівання світлового вітрила. І завдяки їм вже буде можливо коригувати сам міжзоряний корабель, а також більш точно вийти на гравітаційний маневр або якщо паливо буде витрачено під час польоту, порожні або напівпорожні баки можна буде навантажити на гальмівне дзеркало, що може здешевити саме гальмування [8].

Далі змодельуємо потужність іонного двигуна, який можна використовувати для корекції супутника. Для початку потрібно отримати джерело електроенергії. Пропонується використовувати тепло нагрівання вітрила від лазера для вироблення енергії за наступною методикою.

Формула нагріву [16-18]:

$$P_{abs} = A \cdot I \cdot (1 - R), \quad (24)$$

$$P_{el} = s \cdot m, \quad (25)$$

$$\eta = \frac{P_{el}}{P_{abs}}. \quad (26)$$

Тоді $E_{month} = P_{el} \cdot 720 \text{ год} (30 \text{ днів})$ — енергія за місяць у Вт·год.
Витрати енергії представлені в таблиці 4.

Таблиця 4

Витрати енергії за місяць

Сценарій	s (Вт/кг)	$P_{el}=s \cdot m$ (Вт)	$KKД = \frac{P_{el}}{P_{abs}}$	Енергія/місяць E (кВт·ч)
Консервативний	50	$50 \cdot 0.5 = 25$	$\frac{25}{750000} = 3.33 \cdot 10^{-5} = 0.0033$	$25 \cdot 720 / 1000 = 18$
Реалістичний	100	$100 \cdot 0.5 = 50$	$\frac{50}{750000} = 6.67 \cdot 10^{-5} = 0.00667$	$50 \cdot 720 / 1000 = 36$
Оптимістичний	200	$200 \cdot 0.5 = 100$	$\frac{100}{750000} = 1.33 \cdot 10^{-5} = 0.0133$	$100 \cdot 720 / 1000 = 72$

Тяга F з електричною потужністю P та ефективністю η :

$$F = \frac{2\eta P}{v} \quad (27)$$

Результати розрахунків зведемо в таблицю 5.

Таблиця 5

Результати моделювання

$P \setminus I_{sp} \downarrow$	36 kW	3.6 kW	360 W	36 W
2000	2.20 N	0.22 N	0.022 N	0.0022 N
3000	1.47 N	0.147 N	0.0147 N	0.00147 N
5000	0.88 N	0.088 N	0.0088 N	0.00088 N

Отже, якщо ми витрачаємо 2.86 року на розгін, то нам потрібно буде витратити близько 3 на його гальмування, після чого залишок енергії необхідно буде витратити на гравітаційний маневр. Якщо в космосі зустрінуться пил і астероїди, які можуть дещо зіпсувати політ, то світлове вітрило радіусом 10 км за час розгону буде знищено лише на 0.1%-0.3% від усієї площі. Так що загроза є тільки для обладнання. Броня, яка зможе витримати удар від піщинок або каміння, на такій швидкості буде доволі важка, тож щодо цього є своє рішення: замість броні ми можна взяти лінзу, яка розсіює, вона за тим самим принципом може просто здути або спалити те, що може вийти на курс цього корабля. Пізніше лінзу можна буде прикріпити до гальмівного дзеркала для полегшення основної установки [7].

Тож у майбутньому можуть існувати міжпланетні логістичні відносини. Деякі компанії вже готові запустити перше світлове вітрило до найближчої потенційно населеної планети.

Висновки. У результаті проведеного дослідження можна зробити висновок, що технологія світлового паруса є однією з найбільш перспективних для забезпечення ефективної доставки супутників на далекі відстані. Аналіз сучасних розробок та експериментальних зразків показав, що попри існування низки технічних та економічних проблем, дана технологія має значний потенціал для подальшого розвитку.

Визначені проблеми та запропоновані шляхи їх вирішення відкривають можливості для практичного застосування світлового паруса у майбутніх космічних місіях. Математичне моделювання підтвердило реалістичність впровадження цієї технології, а економічний аналіз довів доцільність її розвитку. Таким чином, світловий парус може стати важливим кроком на шляху до нової ери космічних перевезень, що дозволить здешевити та прискорити освоєння космосу.

Список використаних джерел:

1. Гайда П. І., Трофіменко П. Є., Ляпа М. М. Основи теорії польоту і конструкції ракет : навчальний посібник. Суми : Сумський державний університет, 2011. 248с. URL: https://shron1.chtyvo.org.ua/Haida_Pavlo/Osnovy_teorii_polotu_i_konstruktsii_raket.pdf?PHPSESSID=gkhhtj41ddes06jk1bjkihtic3
2. Колесник А. Вантажні перевезення у космосі стають рутиною – аналітик про плани «SpaceX». URL: <https://hromadske.radio/podcasts/rankova-hvylya/vantazhni-perevezennia-u-kosmosi-staiut-rutynoiu-analytik-pro-planu-spacex>
3. Мистецтво космічного вітрильства URL: <https://universemagazine.com/mystecztvo-kosmichnogo-vitrylnyctva/>

-
4. За час в любую точку планеты URL: https://meduza.io/feature/2017/09/29/za-chas-v-lyubuyu-tochku-planety?utm_source=chatgpt.com
 5. Сонячне вітрило: рушійна сила світла. URL: <https://maxpolyakov.com/ua/sonyachne-vitrilo-rushijna-sila-svitla/>
 6. Як спроектувати вітрило, яке не порветься та не розплавиться під час міжзоряної подорожі? URL: <https://ostannipodii.com/a/202202/yak-sproektuvati-vitrilo-yake-ne-porvetsya-ta-ne-rozplavitsya-pid-chas-mizhzorya-100024038/>
 7. Radiation Pressure Formula. URL: https://www.geeksforgeeks.org/physics/radiation-pressure-formula/?utm_source=chatgpt.com
 8. Жир С. І., Гаврилов Б. О., Бобришев Я. О. Щодо розрахунку часу розгону та гальмування світових вітрил під час виведення супутника на віддалену космічну орбіту. *Abstracts of XIII International Scientific and Practical Conference. Prague, Czech Republic*. Pp. 290–294. URL: <https://eu-conf.com/en/events/social-ways-of-training-specialists-in-the-social-sphere-and-inclusive-education/>
 9. Малі супутники. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D0%BB%D1%8B%D0%B5_%D1%81%D0%BF%D1%83%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B8
 10. Фізика для школярів та студентів. URL: https://physic.cx.ua/priskorennya/#google_vignette
 11. Лоренц-фактор. URL: <https://www.maekkes.nl/Lorentzfactor%20RU.html>
 12. Рівноприскорений прямолінійний рух. Прискорення. Швидкість. URL: <https://www.miyklas.com.ua/p/fzika/9-klas/rukh-i-vzayemodiiia-zakoni-zberezhennia-372240/rivnopriskorennii-priamoliniinii-rukh-peremishchennia-363606/re-48df6e5d-8bb6-4705-acd2-71bfd588205e#:~:text=%D0%9F%D1%80%D0%B8%D1%81%D0%BA%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F%20%E2%80%94%D1%86%D0%B5%20%D0%B2%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%B0%20%D1%84%D1%96%D0%B7%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B0%20%D0%B2%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%87%D0%B8%D0%BD%D0%B0,%D0%B7%D0%B0%20%D1%8F%D0%BA%D0%B8%D0%B9%20%D1%86%D1%8F%20%D0%B7%D0%BC%D1%96%D0%BD%D0%B0%20%D0%B2%D1%96%D0%B4%D0%B1%D1%83%D0%BB%D0%B0%D1%81%D1%8F>
 13. Рівноприскорений рух. URL: <https://sites.google.com/view/galinaokhotnik-t1/%D1%80%D1%96%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D0%BF%D1%80%D0%B8%D1%81%D0%BA%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B9-%D1%80%D1%83%D1%85>
 14. Relativistic Energy. URL: <https://courses.lumenlearning.com/suny-physics/chapter/28-6-relativistic-energy/#:~:text=Relativistic%20kinetic%20energy%20is%20KE, reduces%20to%20classical%20kinetic%20energy>
 15. A Database of Albert Einstein's Collected Works. URL: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol2-trans/186>
 16. Cengage – Physics for Scientists and Engineers. URL: <https://www.cengage.com/c/physics-for-scientists-and-engineers-9e-serway/>
 17. Tutorial on methods for estimation of optical absorption and scattering properties of tissue. URL: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC11166171/>
 18. New Materials and Devices for Thermoelectric Power Generation Edited by Basel I. *Abed Ismail*. URL: https://intech-files.s3.amazonaws.com/a043Y00000yuiKEQAY/0014786_Authors_Book%20%282023-12-15%2009%3A15%3A17%29.pdf

References:

1. Haida, P. I., Trofimenko, P. Ye., & Liapa, M. M. (2011). *Osnovy teorii polotu i konstruksii raket: Navchalnyi posibnyk* [Fundamentals of flight theory and rocket design: Textbook]. Sumy: Sumy State University. Retrieved from https://shron1.chtyvo.org.ua/Haida_Pavlo/Osnovy_teorii_polotu_i_konstruksii_raket.pdf
2. Kolesnyk, A. (n.d.). Vantazhni perevezennia u kosmosi staiut rutynoiu – analityk pro plany “SpaceX” [Cargo transportation in space is becoming routine – analyst about SpaceX plans]. Retrieved from <https://hromadske.radio/podcasts/rankova-hvylya/vantazhni-perevezennia-u-kosmosi-staiut-rutynoiu-analitik-pro-planu-spacex>
3. Mystetstvo kosmichnogo vitrylstva [The art of space sailing]. (n.d.). Retrieved from: <https://universemagazine.com/mystecztvo-kosmichnogo-vitrylncytva/>
4. Za chas v liubu tochku planety [In an hour to any point on the planet]. (2017, September 29). Retrieved from <https://meduza.io/feature/2017/09/29/za-chas-v-lyubuyu-tochku-planety>
5. Soniachne vitrylo: rushiina syla svitla [Solar sail: the driving power of light]. (n.d.). Retrieved from <https://maxpolyakov.com/ua/sonyachne-vitrilo-rushijna-sila-svitla/>
6. Yak sproiektuvaty vitrylo, yake ne porvetsia ta ne rozplavytsia pid chas mizhzorianoi podorozhi? [How to design a sail that won't tear or melt during interstellar travel?]. (2022, February). Retrieved from <https://ostannipodii.com/a/202202/yak-sproektuvati-vitrilo-yake-ne-porvetsya-ta-ne-rozplavitsya-pid-chas-mizhzorya-100024038/>
7. Radiation pressure formula. (n.d.). GeeksforGeeks. Retrieved from <https://www.geeksforgeeks.org/physics/radiation-pressure-formula/>

-
8. Zhyr, S. I., Havrylov, B. O., & Bobryshev, Ya. O. (n.d.). Shchodo rozrakhunku chasu rozghonu ta halmuvannia svitlovykh vitryl pid chas vyvedennia suputnyka na viddalenu kosmichnu orbitu [Regarding the calculation of acceleration and braking time of light sails during satellite launch to a distant orbit]. In Abstracts of XIII International Scientific and Practical Conference (pp. 290–294). Prague, Czech Republic. Retrieved from <https://eu-conf.com/en/events/social-ways-of-training-specialists-in-the-social-sphere-and-inclusive-education/>
 9. Mali suputnyky [Small satellites]. (n.d.). Wikipedia. Retrieved from https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D0%BB%D1%8B%D0%B5_%D1%81%D0%BF%D1%83%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B8
 10. Fizyka dlia shkoliariv ta studentiv [Physics for schoolchildren and students]. (n.d.). Retrieved from <https://physic.cx.ua/priskorennia/>
 11. Lorentz-factor. (n.d.). Retrieved from: <https://www.maeckes.nl/Lorentzfactor%20RU.html>
 12. Rivnopriskorenyi priamoliniinyi rukh. Pryskorennia. Shvydkist [Uniformly accelerated linear motion. Acceleration. Velocity]. (n.d.). Retrieved from <https://www.miyklas.com.ua/p/fzika/9-klas/rukh-i-vzayemodiia-zakoni-zberezhennia-372240/rivnopriskorennia-priamoliniinii-rukh-peremishchennia-363606>
 13. Rivnopriskorenyi rukh [Uniformly accelerated motion]. (n.d.). Retrieved from: <https://sites.google.com/view/galinaokhotnik-t1/%D1%80%D1%96%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D0%BF%D1%80%D0%B8%D1%81%D0%BA%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B9-%D1%80%D1%83%D1%85>
 14. Relativistic energy. (n.d.). Lumen Learning. Retrieved from: <https://courses.lumenlearning.com/suny-physics/chapter/28-6-relativistic-energy/>
 15. Albert Einstein's collected works database. (n.d.). Princeton University Press. Retrieved from: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol2-trans/186>
 16. Cengage – Physics for Scientists and Engineers. (n.d.). Retrieved from: <https://www.cengage.com/c/physics-for-scientists-and-engineers-9e-serway/>
 17. Tutorial on methods for estimation of optical absorption and scattering properties of tissue. (n.d.). National Center for Biotechnology Information. Retrieved from: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC11166171/>
 18. Abed Ismail, B. I. (Ed.). (2023). New materials and devices for thermoelectric power generation. IntechOpen. Retrieved from: https://intech-files.s3.amazonaws.com/a043Y00000yuiKEQAY/0014786_Authors_Book.pdf

Дата надходження статті: 26.10.2025

Дата прийняття статті: 17.11.2025

Опубліковано: 30.12.2025