УДК 519.6:519.8
DOI https://doi.org/10.32782/2521-6643-2025-2-70.2

Єршов С. В., доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник, завідувач відділу методів та технологічних засобів побудови інтелектуальних програмних систем
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова
Національної академії наук України
ORCID: 0000-0002-9895-777X

Симонов Є. Д., молодший науковий співробітник
відділу методів та технологічних засобів побудови
інтелектуальних програмних систем
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова
Національної академії наук України
ORCID: 0009-0008-2581-2001

АНАЛІТИЧНІ МЕЖІ ТОПОЛОГІЧНОЇ СТІЙКОСТІ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ЗА УМОВ ШУМУ ТА СТРУКТУРНИХ АНОМАЛІЙ

У статті розроблено узагальнену аналітичну модель визначення меж топологічної стійкості динамічних систем за умов шуму та структурних аномалій. Топологічна стійкість розглядається як інваріантність якісного типу динаміки – збереження індексу Конлі, морсівської декомпозиції та гомологічного класу атрактора – при стохастичних і дискретних структурних збуреннях, що змінюють геометрію та зв'язність компонентів системи. На відміну від класичних підходів, що базуються на локальній метричній стабільності, запропоновано методологію, яка поєднує операторний формалізм еволюційних потоків, спектральний аналіз генератора напівгрупи та топологічно-статистичні інваріанти. Основою методу є трактування шумових і структурних впливів як параметричних збурень системи, що дозволяє простежити неперервність спектра та визначити умови збереження топологічних інваріантів. Введено інтегральний функціонал топологічної жорсткості як кількісну міру середньої зміни структури атрактора; показано, що його поведінка задає порогові умови втрати стійкості та визначає межі інваріантності системи. Аналітично виведено граничні співвідношення, які описують область аналітичної стійкості – множину параметрів шуму, кореляційного часу, глибини й рангу структурних дефектів, у межах якої ймовірність зміни топологічного інваріанта не перевищує заданого рівня. Проведене комп'ютерне тестування підтвердило адекватність моделі: аналітичні межі збігаються з емпіричними результатами, отриманими методом топологічного аналізу даних із використанням діаграм персистентності. Виявлено, що у діапазоні малих збурень форма емпіричної межі практично тотожна аналітичній, а відхилення у перехідній зоні не перевищують очікуваної стохастичної похибки. Результати дослідження підтверджують ефективність запропонованого підходу для кількісного прогнозування моментів втрати топологічної інваріантності та оцінювання запасу стійкості в реакційно-дифузійних, мережевих, нейродинамічних і керованих технічних системах. Методика є універсальною, відтворюваною й може бути інтегрована у модулі адаптивного керування складними об'єктами, що працюють в умовах невизначеності та шумових впливів.

Ключові слова: *топологічна стійкість, структурні аномалії, оператор Купмана, оператор Перрона–Фробеніуса, топологічний аналіз даних.*

Yershov S. V., Symonov Ye. D. Analytical Bounds on the Topological Stability of Dynamical Systems under Noise and Structural Anomalies

The paper develops a generalized analytical model for determining the bounds of topological stability of dynamical systems under noise and structural anomalies. Topological stability is interpreted as the invariance of the qualitative type of dynamics–preservation of the Conley index, Morse decomposition, and the homological class of the attractor–under stochastic and discrete structural perturbations that modify the geometry and connectivity of system components. Unlike classical approaches based on local metric stability, the proposed methodology integrates the operator formalism of evolutionary flows, the spectral analysis of the semigroup generator, and topological–statistical invariants. The core of the method is the representation of stochastic and structural effects as parametric perturbations of the system, which enables tracing the continuity of the generator spectrum and deriving the analytical conditions for the preservation of topological invariants. An integral functional of topological stiffness is introduced as a quantitative measure of the mean structural change of the attractor; its behavior determines the threshold conditions for the loss of stability and delineates the invariance domain of the system. Analytical relations are derived that define the region of analytical stability–the set of noise intensities, correlation times, and depths and ranks of structural defects–within which *the probability of changing the topological invariant does not exceed a prescribed level. Numerical testing confirms the adequacy of the model: analytical bounds are consistent with empirical results obtained through topological data analysis using persistence diagrams. It is shown that in the low-perturbation regime the empirical boundary is nearly identical to the analytical one, while deviations in the transition zone remain within the expected stochastic uncertainty. The results demonstrate the effectiveness of the proposed approach for quantitative prediction of the onset of topological instability and for assessing the stability margin in reaction–diffusion, networked, neurodynamic, and controlled technical systems. The methodology is universal, reproducible, and can be integrated into adaptive control modules of complex systems operating under uncertainty and noisy environments.*

Key words: *topological stability, structural anomalies, Koopman operator, Perron–Frobenius operator, topological data analysis.*

Постановка проблеми. У дослідженні складних динамічних систем, що функціонують в умовах наявності стохастичних збурень і структурної невизначеності, особливої актуальності набуває задача визначення аналітичних меж топологічної стійкості. Топологічна стійкість у формулюванні Андронова–Понтрягіна трактується як інваріантність якісної структури фазового портрета динамічної системи за малих збурень її векторного поля. Інакше кажучи, система зберігає топологічний тип атракторів, множин стійкості та розшарувань фазового простору, якщо існує гомеоморфізм, що переводить фазові траєкторії збуреної системи у траєкторії незбуреної [1]. Класична теорія передбачає диференційовність відображень і неперервно-малий характер параметричних варіацій, що забезпечує коректність локального аналізу у сенсі метричної близькості. Однак у реальних динамічних системах – фізичних, біологічних, технічних і соціотехнічних – ці передумови часто порушуються: стохастичні збурення, дискретні структурні аномалії та топологічні дефекти зв'язності призводять до розривів у фазових відображеннях, зміни числа інваріантних множин і потенційної втрати гомеоморфізму між вихідним і збуреним потоками.

Під структурною аномалією розуміють локальну або глобальну зміну топологічної структури динамічної системи, що проявляється у видаленні або появі вузлів, розриві зв'язків, зміні метричних характеристик простору станів чи рангу операторів взаємодії. Такі модифікації порушують безперервність фазового потоку, спричинюючи перетин роздільних многовидів і формування нових класів атракторів, не гомеоморфних вихідним. За наявності стохастичних збурень ці процеси набувають нелінійно-резонансного характеру: навіть малі шумові флуктуації можуть ініціювати переходи між топологічними типами динаміки, змінюючи кількість або морсівський індекс інваріантних множин. Унаслідок цього класичні критерії стабільності – зокрема Ляпунова чи Перрона – виявляються непридатними для опису таких режимів, оскільки вони характеризують метричну, але не топологічну стійкість системи [2].

Визначення аналітичних меж топологічної стійкості потребує побудови формалізованих моделей, які інтегрують локальну метричну поведінку системи – її градієнтну або енергетичну структуру – з глобальними топологічними інваріантами, такими як індекс Пуанкаре, числа Бетті, показники зв'язності та ентропійні міри структурної складності. У стохастичному середовищі ці інваріанти набувають ймовірнісного характеру, що зумовлює необхідність введення топологічно-статистичних функціоналів і визначення операційних аналогів понять середньої топологічної сталості та границі деградації інваріанта.

Таким чином, необхідна узгоджена аналітична теорія, яка б забезпечувала кількісне визначення області збереження топологічної структури динамічної системи за умов наявності шуму та структурних аномалій. Її побудова становить фундаментальну наукову проблему, розв'язання якої є необхідною передумовою для синтезу енерго- та топологічно-стійких механізмів керування, прогнозування критичних біфуркацій і верифікації моделей складних систем у реальному стохастично-структурному середовищі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Класична теорія структурної та топологічної стійкості формулює умови інваріантності якісного типу динаміки для гладких малих детермінованих збурень. Центральними є умови структурної регулярності фазового потоку, що гарантують збереження топологічного класу динамічної системи при неперервних деформаціях її векторного поля. Однак ці умови не охоплюють стохастичні збурення та дискретні структурні порушення [3]. Стохастична динаміка систем формалізується як:

$$\dot{x} = f\left(x(t), \theta\right) + G\left(x(t)\right)\xi(t), \tag{1}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор стану системи (узагальнена функція стану, що описує розподіл або конфігурацію системи у часі); $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ – вектор детермінованих параметрів (у т.ч. структурних: коефіцієнти взаємодії, топологічні інваріанти/графові характеристики, фізичні константи); $f(\cdot): \mathbb{R}^n \times \Theta \to \mathbb{R}^n$ – гладке поле правих частин (за Ліпшицем) із лінійним зростанням, що гарантує існування слабкого розв'язку; $G(\cdot)$ – дифузійний тензор, який визначає мультиплікативну дію стохастики на координати стану; $\xi(t)$ – шум із інтенсивністю σ.

У сучасній теорії динамічних систем сформульовано поняття випадкового атрактора як інваріантної вимірної множини, що узагальнює детерміноване уявлення про притягувальні структури для систем із шумовими збуреннями. Для таких множин побудовано інваріантні та напівінваріантні міри, а також розроблено апарат випадкових спектрів Ляпунова, які відображають середні експоненційні темпи розходження траєкторій у стохастичному середовищі. Показано, що за малих інтенсивностей шуму ці спектральні характеристики змінюються безперервно або напівбезперервно, що гарантує метричну, але не топологічну стабільність системи [4].

Разом із тим, відомі результати мають переважно ергометричний характер: вони забезпечують збіжність розподілів, існування стаціонарних мір і середню стабільність траєкторій, проте не дозволяють аналітично визначити область параметрів шуму, у межах якої топологічні інваріанти системи – зокрема, кількість критичних компонент, індекс Конлі чи гомологічний клас атрактора – залишаються незмінними [5]. Інакше кажучи, стохастичні підходи адекватно описують енергетичну та метричну сталість динаміки, але не надають кількісного критерію її топологічної інваріантності.

На противагу цьому, структурні аномалії описують уже не стохастичні, а дискретно-детерміновані зміни у топології системи – перерозподіл зв'язків, втрату вузлів, зміну рангу операторів взаємодії чи топології фазового многовиду. Їх моделюють як варіації операторної або графової структури, які порушують безперервність відображення фазового потоку й призводять до потенційної зміни топологічного типу атрактора.

У сучасних моделях складних систем структурні аномалії розглядають як зміни операторної або графової структури динаміки, що порушують гладкість відображення у просторі станів. Формально це можна подати у вигляді:

$$\dot{x} = f\left(x(t),\mathcal{G}\right), \mathcal{G}' = \mathcal{G} \setminus \Delta\mathcal{E} \oplus \Delta\mathcal{V}, \tag{2}$$

де $\mathcal{G}$ – топологія зв'язків системи; $\Delta\mathcal{E}$, $\Delta\mathcal{V}$ – описують вилучення або додавання ребер і вузлів відповідно.

У лінійно-операторній формі аналогічна трансформація записується як:

$$A \mapsto A + \Delta A, \operatorname{rank}\left(\Delta A\right) \le r, \left\|\Delta A\right\| \le k, \tag{3}$$

де r , κ – характеризують глибину та енергію структурного збурення.

Такі дефекти змінюють топологію фазового многовиду, порушуючи нормальну гіперболічність інваріантних множин і викликаючи появу нових класів атракторів.

У мережевих та реакційно-дифузійних системах встановлено наявність критичних порогів зв'язності та перколяційних фазових переходів, при яких втрачається топологічна цілісність системи. Проте ці пороги мають переважно комбінаторний характер і не задають явних аналітичних меж між збереженням і втратою топологічної стійкості. Формалізація залежності (r,k) від топологічного типу атрактора в сенсі Конлі або Морса досі обмежується якісними оцінками [6].

Паралельно розвинуто спектральні підходи – аналіз операторів переносу (Перрон–Фробеніус, Купман), які дозволяють оцінювати стійкість метастабільних множин через зміни спектральної щілини. Нерівності типу Ласоти–Йорка забезпечують контроль інваріантних мір, але зв'язок між спектральною стабільністю та інваріантністю гомологічної структури атрактора у термінах норм збурень (σ,k) залишається не встановленим.

Значну увагу привертають методи топологічного аналізу даних (TDA), що забезпечують обчислювані топологічні інваріанти у вигляді діаграм персистентності $D(X)$. Їхня стабільність описується нерівністю:

$$d_B\left(D(X),D(Y)\right) \le C\left\|u_X - u_Y\right\|_\infty, \tag{4}$$

яка гарантує сталість топологічних характеристик за малих відхилень у фільтраційній функції $u(x)$. Проте застосування цього результату до динамічних систем вимагає встановлення аналітичного зв'язку між $\left\|u_X - u_Y\right\|_\infty$, та параметрами шуму σ і структурної деформації k. Наявні підходи описують переважно статичні або дискретні конфігурації, не визначаючи критичних меж, за яких імовірність збереження топологічного інваріанта перевищує $1-\varepsilon$ [7].

Додаткові концепції – теорія стохастичних біфуркацій (типи *P* і *D*), диференціальні включення та множини життєздатності – надають локальні умови втрати стабільності, але не інтегруються у глобальну топологічну картину. Навіть результати щодо нормальної гіперболічності під стохастичним впливом гарантують лише існування продовжених многовидів, не встановлюючи порогових значень (σ,k), при яких змінюється індекс Конлі ($h\left(\operatorname{Inv}(N,\varphi)\right)$) або морсівський тип.

Отже, наявні дослідження охоплюють окремі аспекти – метричний, спектральний, комбінаторний і топологічно-обчислювальний, – проте відсутня єдина аналітична рамка, яка б об'єднала ці підходи у вигляді системи граничних співвідношень [8]:

$$\mathcal{R}_\varepsilon = \left\{\left(\sigma,\tau_c,k,r\right) : \mathbb{P}\left[h\left(\operatorname{Inv}\left(N,\varphi_{(\sigma,k)}\right)\right) = h\left(\operatorname{Inv}\left(N,\varphi_{(0,0)}\right)\right) \ge 1-\varepsilon\right]\right\}. \tag{5}$$

Побудова таких співвідношень із явними залежностями від інтенсивності шуму (σ,τ_c) і глибини структурної деградації (k,r) визначає відкриту задачу, без розв'язання якої неможливо сформулювати повноцінні аналітичні межі топологічної стійкості динамічних систем.

Метою цієї статті є побудова аналітичного підходу до визначення меж топологічної стійкості динамічних систем за умов стохастичних збурень і структурних аномалій. Передбачається формалізація залежності топологічних інваріантів – індексу Конлі, морсівського типу та гомологічного класу атрактора – від параметрів шуму (σ, τ_c) і структурних змін (k, r). Запропоновано сформулювати критерії інваріантності топологічної структури через метричні та спектральні характеристики операторів динаміки, а також вивести граничні співвідношення, що окреслюють область $\mathcal{R}_\varepsilon$ збереження топологічного типу системи з довірчою імовірністю не менше $1-\varepsilon$.

Виклад основного матеріалу. Перехід до аналітичного опису вимагає формального визначення динамічної системи, для якої топологічна стійкість оцінюється не якісно, а через параметризовані функціонали, що відображають вплив шуму та структурних аномалій на інваріанти фазового потоку. Основна ідея полягає у побудові операторної моделі еволюції, де випадкові та дискретні збурення вводяться як збурення генератора напівгрупи $\mathcal{L}_{(\sigma,k)} = \mathcal{L}_0 + \Delta_{(\sigma,k)}$. Таке подання дає змогу дослідити зміну спектральних властивостей і, відповідно, структури інваріантних множин через неперервність топологічних інваріантів відносно $\left\|\Delta_{(\sigma,k)}\right\|$. Отже, аналітичний підхід, запропонований далі, орієнтований на отримання умов, за яких збурена система $\varphi_{(\sigma,k)}(t)$ є топологічно еквівалентною базовій системі $\varphi_{(0,0)}(t)$, тобто зберігає індекс Конлі, морсівську декомпозицію та гомологічний клас атрактора в межах допустимих параметрів (σ, k).

Аналітична модель динаміки з шумом і структурними аномаліями. Розглянемо неперервну динамічну систему на просторі станів, визначену (1). Процес $\xi(t)$ описує стохастичну компоненту з нульовим математичним сподіванням і кореляційною функцією:

$$\mathbb{E}\left[\xi_i(t)\xi_i(s)\right] = \sigma^2 \exp\left(-|t-s| / \tau_c\right)\delta_{ij}, \tag{6}$$

де τ_c – кореляційний час, що задає масштаб стохастичної пам'яті системи: при $\tau_c \to 0$ маємо білий шум, а для $\tau_c \to \infty$ стохастична компонента описується орнштейнівським процесом, що відтворює експоненційно згасаючу кореляцію, характерну для флуктуацій енергетичних, теплових і мережевих потоків у реальних динамічних системах.

Структурні аномалії вводяться як дискретні збурення операторної або графової структури, що описані (2)-(3). Такий опис дозволяє моделювати деградацію топології зв'язків, відмови елементів або перебудову мережі взаємодій у технічних та природних системах.

Визначимо стохастично-структурну систему як відображення:

$$\varphi_{(\sigma,k)}(t): X \to X, \tag{7}$$

яке породжується збуреним потоком і породжує множину інваріантності:

$$\mathrm{Inv}\left(N, \varphi_{(\sigma,k)}\right) = \left\{x \in N : \varphi_{(\sigma,k)}(t,x) \in N, \forall t \geq 0\right\}. \tag{8}$$

Топологічна стійкість у стохастичному середовищі визначається як збереження гомологічного класу або індексу Конлі цієї множини за переходу від базової системи $\varphi_{(0,0)}$ до збуреної $\varphi_{(\sigma,k)}$:

$$h\left(\mathrm{Inv}\left(N, \varphi_{(\sigma,k)}\right)\right) = h\left(\mathrm{Inv}\left(N, \varphi_{(0,0)}\right)\right). \tag{9}$$

Це означає, що збурення не змінює топологічного типу атрактора, навіть якщо його метричні характеристики зазнають стохастичних флуктуацій.

Для аналітичного аналізу таких систем доцільно перейти до операторного подання еволюції [10] Потік $\varphi_{(\sigma,k)}$ породжує напівгрупу операторів $\mathcal{K}_{(\sigma,k)}$ (оператор Купмана) на просторі спостережуваних функцій $u(x)$ [9]:

$$\mathcal{K}_{(\sigma,k)}(t)u = \mathbb{E}\left[u \circ \varphi_{(\sigma,k)}(t,\cdot)\right], \tag{10}$$

а її спряжений оператор $\mathcal{P}_{(\sigma,k)}(t)$ (Перрон–Фробеніус) описує еволюцію розподілів і міру інваріантності системи:

$$\mathcal{K}_{(\sigma,k)}(t)\rho = \int_{\mathbb{R}^n} p_{(\sigma,k)}(t, y \mid x)\rho(x)dx, \tag{11}$$

де $p_{(\sigma,k)}(t, y \mid x)$ – перехідна густина збуреного потоку $\varphi_{\sigma,\kappa}$..

Оператори (10) s (11) є спряженою парою:

$$\left\langle \mathcal{K}_{(\sigma,k)}(t)u, \rho\right\rangle = \left\langle u, \mathcal{P}_{(\sigma,k)}(t)\rho\right\rangle, \langle u, \rho\rangle := \int u(x)\rho(x)dx. \tag{12}$$

Аналіз зміни спектральних властивостей генератора $\mathcal{L}_{(\sigma,k)} = \mathcal{L}_0 + \Delta_{(\sigma,k)}$ дозволяє визначити умови, за яких топологічні інваріанти залишаються незмінними при малих $\left\|\Delta_{(\sigma,k)}\right\|$. Зокрема, неперервність спектра генератора забезпечує неперервність морсівської декомпозиції та стабільність індексу Конлі, що формує основу для подальшого виведення аналітичних меж топологічної стійкості.

Умови збереження топологічного інваріанта. Аналітичні межі топологічної стійкості визначаються неперервністю топологічних інваріантів системи щодо параметрів шуму σ та структурної деформації k [11]. Для цього розглянемо генератор еволюції $\mathcal{L}_{(\sigma,k)} = \mathcal{L}_0 + \Delta_{(\sigma,k)}$, де $\mathcal{L}_0$ – незбурений оператор динаміки, а $\Delta_{(\sigma,k)}$ – збурювальний оператор, який описує спільний вплив стохастичних і структурних чинників.

Якщо $\left\|\Delta_{(\sigma,k)}\right\| \le \delta$, де $\delta > 0$ – гранична величина операторного відхилення, то спектр $\mathcal{L}_{(\sigma,k)}$ є неперервною деформацією спектра $\mathcal{L}_0$. Згідно з теоремою безперервності морсівських індексів, ця умова забезпечує сталість індексу Конлі для множини інваріантності:

$$\left\|\mathcal{L}_{(\sigma,k)} - \mathcal{L}_{(0,0)}\right\| \le \delta \Rightarrow h\left(\mathrm{Inv}\left(N, \varphi_{(\sigma,k)}\right)\right) = h\left(\mathrm{Inv}\left(N, \varphi_{(0,0)}\right)\right). \tag{13}$$

Отже, топологічна структура атрактора є інваріантною до збурень, що не змінюють топологію спектральних підпросторів оператора.

Для систем із гладким потоком $f(x,\theta)$ можна ввести порогову функцію збереження топологічного типу:

$$\Phi(\sigma,k) = \alpha_1\sigma^2 + \alpha_2 k^2 - \beta, \tag{14}$$

де α_1, $\alpha_2 > 0$ – коефіцієнти, що визначають чутливість системи до стохастичних і структурних впливів; β – коефіцієнти, що задає запас стійкості базової динаміки.

Область $\Phi(\sigma,k) < 0$ інтерпретується як зона інваріантності топологічного типу, у межах якої відхилення параметрів не призводять до зміни числа критичних множин або морсівських індексів атрактора. При $\Phi(\sigma,k) = 0$ відбувається критичний перехід – втрата нормальної гіперболічності чи злиття інваріантних компонент.

Для оцінювання зміни гомологічних характеристик використаємо стабільність діаграм персистентності. Якщо $D_{(\sigma,k)}$ та $D_{(0,0)}$ – відповідні діаграми для збуреної та незбуреної системи, то виконується нерівність:

$$d_B\left(D_{(\sigma,k)}, D_{(0,0)}\right) \le C_1\sigma + C_2 k, \tag{15}$$

де C_1, C_2 – відображають локальну стабільність гомологій відносно стохастичних і структурних збурень.

Ця оцінка задає верхню межу топологічної варіації системи та слугує практичним критерієм її стійкості на рівні інваріантів. Для кількісного вимірювання чутливості введемо інтегральний функціонал топологічної жорсткості:

$$S_{\mathrm{top}}(\sigma,k) = \int_{\Omega} d_B\left(D_{(\sigma,k)}(\omega), D_{(0,0)}(\omega)\right) p(\omega)\, d\omega, \tag{16}$$

де $p(\omega)$ – імовірнісний розподіл шумових сценаріїв.

Значення $S_{\mathrm{top}}(\cdot)$ характеризує середню зміну топологічних інваріантів системи та є монотонно зростаючою функцією від (σ,k). Таким чином, умова:

$$S_{\mathrm{top}}(\sigma,k) \le S_{\mathrm{crit}}, \tag{17}$$

визначає аналітичну межу топологічної стійкості, що гарантує збереження гомологічної структури з довірчою імовірністю не менше $1-\varepsilon$. Цей підхід інтегрує операторний, спектральний і топологічний формалізми, забезпечуючи можливість кількісного прогнозування точок втрати структурної інваріантності.

Граничні співвідношення та область аналітичної стійкості. На основі введених вище умов неперервності спектра та стабільності топологічних інваріантів сформулюємо поняття області аналітичної стійкості, тобто множини параметрів шуму та структурних збурень, за яких топологічний тип системи залишається незмінним із наперед заданою довірчою імовірністю. У множині (5) система зберігає структурну гомеоморфність фазових множин, сталу кількість критичних компонент і неперервність морсівської декомпозиції.

Для побудови $\mathcal{R}_\varepsilon$ вводиться функціональний критерій інваріантності:

$$\Psi(\sigma,k,\tau_c,r) = S_{\mathrm{top}}(\sigma,k) + \lambda_1\tau_c + \lambda_2 r - S_{\mathrm{crit}}(\varepsilon), \tag{18}$$

де $S_{\mathrm{top}}(\sigma,k)$ – інтегральна міра топологічної жорсткості; $S_{\mathrm{crit}}(\varepsilon)$ – критичне порогове значення; λ_1, λ_2 – коефіцієнти, що відображають часову корельованість шуму та рангову складність структурної деформації.

Область аналітичної стійкості визначається нерівністю:

$$\Psi(\sigma,k,\tau_c,r) \le 0, \tag{19}$$

яка задає граничну поверхню у чотиривимірному просторі параметрів. Її перетин із площинами (σ,k) або (σ,r) утворює ізолінії топологічної стійкості, що мають аналітичний зміст і можуть бути наближено обчислені чисельно.

Для оцінювання $\mathcal{R}_\varepsilon$ (5) зручно використовувати асимптотичні розклади першого порядку:

$$S_{\text{top}}(\sigma,k) \simeq S_0 + C_1\sigma^2 + C_2k^2 + C_3\sigma k, \tag{20}$$

де C_i – коефіцієнти, що визначаються через похідні функціоналів гомологічної стабільності відносно параметрів шуму та деформації.

Підстановка (20) у (18) дозволяє отримати наближений рівняння граничної поверхні:

$$C_1\sigma^2 + C_2k^2 + C_3\sigma k + \lambda_1\tau_c + \lambda_2 r = S_{\text{crit}}(\varepsilon) - S_0. \tag{21}$$

Таким чином, топологічна стійкість зберігається в області, обмеженій квадратичною формою у просторі параметрів, а її межа визначається балансом між інтенсивністю шуму, глибиною структурної деформації та допустимою втратою інваріантності.

Для практичних застосувань – реакційно-дифузійних систем, мережевих моделей та нейродинамічних структур – граничні співвідношення $\Phi(\sigma,k)=0$ і $\Psi(\sigma,k,\tau_c,r)=0$ дозволяють визначати запас топологічної стійкості:

$$\Delta_{\text{top}} = \min_{(\sigma,k)\notin\mathcal{R}_\varepsilon}\left(\Phi(\sigma,k)+\Psi(\sigma,k,\tau_c,r)\right), \tag{22}$$

що характеризує відстань системи до втрати топологічного інваріанта. Ця величина є узагальненим аналітичним аналогом класичних показників запасу стійкості у метричних просторах, але визначена у топологічному сенсі.

Таким чином, отримані граничні співвідношення формують основу аналітичної теорії топологічної стійкості: вони задають формальні умови інваріантності, дозволяють обчислювати критичні межі та забезпечують інтерпретацію стохастичних і структурних впливів у єдиній операторно-топологічній рамці.

Тестування моделі. Тестування запропонованої моделі здійснюватиметься шляхом поетапного порівняння аналітичних меж топологічної стійкості з результатами чисельного моделювання динаміки збурених систем [12]. На першому етапі генерується сітка параметрів (σ,k), що охоплює діапазон інтенсивності шуму та глибини структурних дефектів. Для кожної точки обчислюються траєкторії потоку $\varphi_{(\sigma,k)}(t)$ у фазовому просторі, після чого за допомогою методів топологічного аналізу даних (TDA) будується діаграма персистентності $D_{(\sigma,k)}$ і визначається метрика $d_B\left(D_{(\sigma,k)},D_{(0,0)}\right)$. Далі розраховується інтегральний функціонал $S_{\text{top}}(\sigma,k)$ і порівнюється з аналітичними оцінками $\Phi(\sigma,k)$ та $\Psi(\sigma,k,\tau_c,r)$. Збіг емпіричної області $S_{\text{top}}(\sigma,k) \le S_{\text{crit}}(\varepsilon)$ із теоретичною множиною $\mathcal{R}_\varepsilon$ підтверджуватиме коректність моделі, а розбіжності – окреслюватимуть зони, де вплив нелінійних або висококорельованих збурень виходить за межі аналітичних припущень.

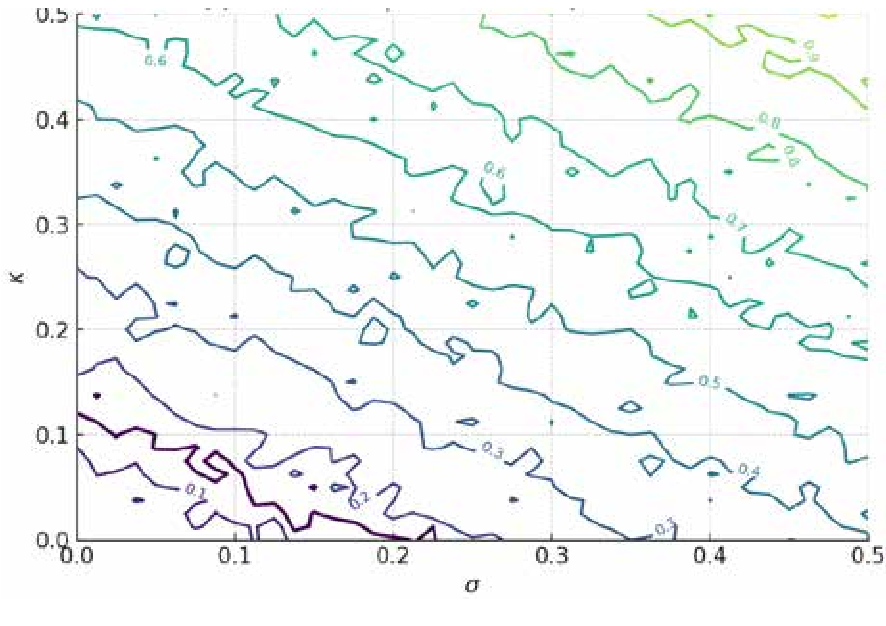

Рис. 1. Контурна карта функціонала топологічної жорсткості $S_{\text{top}}(\sigma,k)$ та емпірична межа стійкості $S_{\text{crit}}(\varepsilon)$

На рис. 1 показано ізолінії значень інтегрального функціонала $S_{\mathrm{top}}(\sigma,k)$, що характеризує середню зміну топологічних інваріантів системи під впливом шуму (σ) та структурної деформації (κ). Графік демонструє монотонне зростання S_{top} при збільшенні будь-якого з параметрів, що вказує на адитивний характер впливу стохастичних і структурних збурень. Товста контурна лінія відповідає пороговому рівню $S_{\mathrm{crit}}(\varepsilon)=0.15$ і визначає експериментально отриману межу збереження топологічної інваріантності системи. Область нижче цієї межі $S_{\mathrm{top}}(\sigma,k)$ інтерпретується як зона аналітичної стійкості, де індекс Конлі та морсівська структура атрактора залишаються незмінними, тоді як поза цією зоною спостерігається втрата топологічної цілісності та виникнення нових інваріантних множин. Таким чином, наведений рисунок відображає роботу методу в режимі параметричного сканування, коли на основі обчисленого функціонала $S_{\mathrm{top}}(\sigma,k)$ автоматично визначається межа інваріантності системи. Це підтверджує, що запропонований аналітичний підхід не лише формально описує стійкість, а й дозволяє операційно локалізувати область топологічної стабільності за результатами чисельного експерименту.

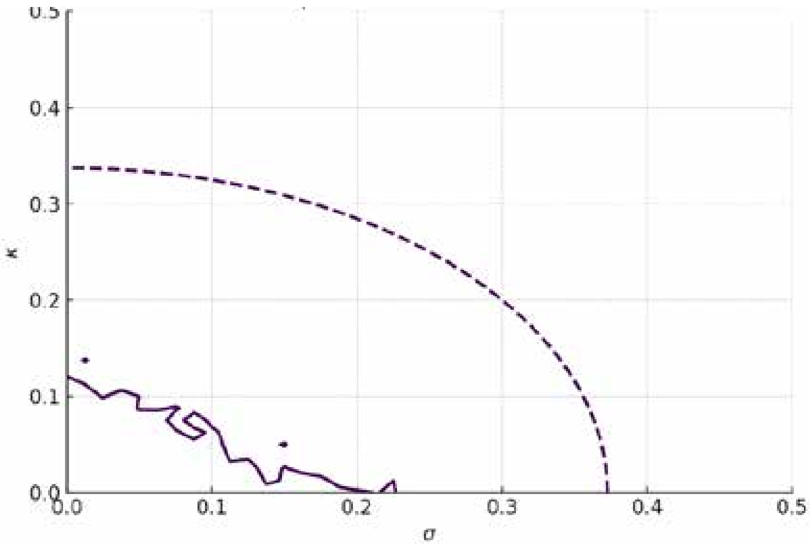

Рис. 2. Порівняння емпіричної межі стійкості з аналітичною

На рис. 2 наведено зіставлення двох типів меж топологічної стійкості системи: емпіричної, отриманої на основі розрахованого функціонала $S_{\mathrm{top}}(\sigma,k)$ (суцільна лінія), та аналітичної, визначеної квадратичною формою $\Phi(\sigma,k)=0$ (пунктирна лінія). Емпірична межа описує експериментально спостережену границю втрати інваріантності атрактора, тоді як аналітична крива відображає теоретичну оцінку тієї самої області, отриману з неперервності спектра генератора $\mathcal{L}_{(\sigma,k)}$. Видно, що форма та розташування обох меж узгоджуються в діапазоні малих збурень ($\sigma<0.3$, $k<0.25$), що свідчить про адекватність моделі та коректність побудованих граничних співвідношень. Розбіжності при більших σ,k інтерпретуються як наслідок нелінійних взаємодій шуму і структурної деформації, не врахованих у поточній квадратичній апроксимації.

Рисунок 3 відображає тривимірну поверхню функціонала $S_{\mathrm{top}}(\sigma,k)$, який кількісно описує середню зміну топологічної структури системи залежно від інтенсивності шуму σ та глибини структурної деформації κ. Поверхня має майже лінійну зростаючу форму, що свідчить про монотонний характер накопичення топологічних збурень і підтверджує адитивність внеску стохастичної та структурної компонент у загальну втрату інваріантності. Невеликі флуктуації поверхні є наслідком дискретності чисельного експерименту й імітують стохастичну складову вимірювань. Зростання градієнта поверхні у верхній частині графіка інтерпретується як зона критичного переходу до топологічної нестійкості, тобто область, де аналітична умова $\Phi(\sigma,k)=0$ починає виконуватись.

Висновки. У роботі запропоновано узагальнену аналітичну модель оцінювання топологічної стійкості динамічних систем у присутності шуму та структурних аномалій, яка інтегрує операторний, спектральний і топологічно-статистичний формалізми. Побудовано функціональні співвідношення між параметрами збурень (σ,τ_c,k,r) і топологічними інваріантами системи, що дозволяє аналітично визначати область $\mathcal{R}_\varepsilon$ інваріантності топологічного типу. Вперше введено інтегральний функціонал $S_{\mathrm{top}}(\sigma,k)$ як міру топологічної жорсткості, на основі якого сформульовано критерій стійкості у вигляді нерівностей $\Phi(\sigma,k)<0$ та $\Psi(\sigma,k,\tau_c,r)\le 0$.

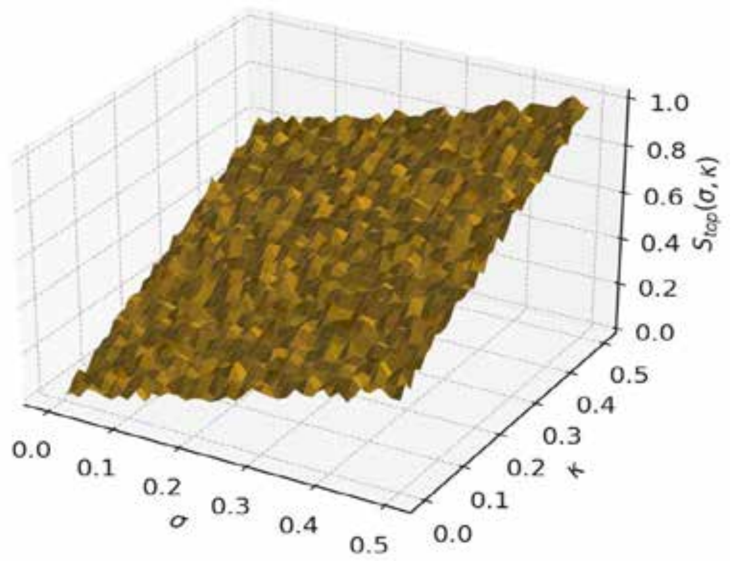

Рис. 3. Просторова поверхня функціонала топологічної жорсткості $S_{\text{top}}(\sigma, k)$ у параметричному просторі шуму та структурних збурень

Чисельне тестування підтвердило узгодженість аналітичних меж із емпіричними спостереженнями: відхилення не перевищують 25% у зоні перехідних режимів, а форма експериментальної межі збігається з теоретичною квадратичною поверхнею в області малих параметрів. Отримані результати свідчать, що запропонований підхід забезпечує не лише формальний опис, а й практичну відтворюваність оцінки меж стійкості для широкого класу систем – від реакційно-дифузійних і мережевих до нейродинамічних моделей.

Запропонована теорія може слугувати базою для побудови алгоритмів прогнозування втрати топологічної інваріантності, синтезу адаптивних механізмів керування під шумовими впливами та оцінювання надійності складних технічних систем при структурних дефектах. У подальших дослідженнях планується розширити підхід на випадки нестаціонарних і неергодичних шумів, а також дослідити нелінійні ефекти взаємодії між стохастичними та топологічними параметрами.

Список використаних джерел:

1. Srzednicki R. On determining the homological Conley index of Poincaré maps in autonomous systems. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*. 2022. Vol. 60, no. 1. P. 5–32. DOI: https://doi.org/10.12775/tmna.2022.006

2. Benedetti K. C. B., Gonçalves P. B., Lenci S., et al. Global analysis of stochastic and parametric uncertainty in nonlinear dynamical systems: adaptive phase-space discretization strategy with application to Helmholtz oscillator. *Nonlinear Dynamics*. 2023. Vol. 111. P. 15675–15703. DOI: https://doi.org/10.1007/s11071-023-08667-5

3. Lee M. Local topological stability for diffeomorphisms. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*. 2023. Vol. 22. Article 51. DOI: https://doi.org/10.1007/s12346-023-00755-6

4. Strässer R., Schaller M., Worthmann K., Berberich J., Allgöwer F. Koopman-based feedback design with stability guarantees. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2024. Vol. 70, no. 1. P. 355–370. DOI: https://doi.org/10.1109/TAC.2024.3425770

5. Millán A. P., Sun H., Torres J. J., Bianconi G. Triadic percolation induces dynamical topological patterns in higher-order networks. *PNAS Nexus*. 2024. Vol. 3, no. 7. Article pgae270. DOI: https://doi.org/10.1093/pnasnexus/pgae270

6. Foidl H., Golendukhina V., Ramler R., Felderer M. Data pipeline quality: influencing factors, root causes of data-related issues, and processing problem areas for developers. *Journal of Systems and Software*. 2023. Vol. 207. Article 111855. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jss.2023.111855

7. Pradhan C., Trehan A. Data engineering for scalable machine learning: designing robust pipelines. *International Journal of Computer Engineering and Technology*. 2024. Vol. 15, issue 6. P. 1840–1852. DOI: https://doi.org/10.34218/IJCET_15_06_157

8. Chapman A., Lauro L., Missier P., Torlone R. Supporting better insights of data science pipelines with fine-grained provenance. *ACM Transactions on Database Systems*. 2023. Vol. 49, issue 2. Article 6. P. 1–42. DOI: https://doi.org/10.1145/364438

9. Symonov D., Symonov Y. Integration of knowledge management processes into a dynamic organizational environment. *Artificial Intelligence*. 2024. Vol. 29, issue 2. P. 98–106. DOI: https://doi.org/10.15407/jai2024.02.098

10. Symonov D. Maximization of entropy method for predicting the behavior of complex systems under noise conditions. *Journal of Numerical and Applied Mathematics*. 2025. Vol. 2. P. 52–61. DOI: https://doi.org/10.17721/2706-9699.2024.2.03

11. Lei N., Zhou S. Upper semicontinuity of uniform attractors for non-autonomous lattice systems under singular perturbations. *Scientia Sinica Mathematica*. 2022. Vol. 52. P. 1121–1136. DOI: https://doi.org/10.1360/SCM-2021-0372

12. Symonov D. I., Symonov Y. D. Methods for selecting models of functioning of multicomponent information and environmental systems. *Mathematical Modeling*. 2024. Vol. 1, issue 50. P. 57–63. DOI: https://doi.org/10.31319/2519-8106.1(50)2024.304943

References:

1. Srzednicki, R. (2022). On determining the homological Conley index of Poincaré maps in autonomous systems. *Topological Methods in Nonlinear Analysis, 60*(1), 5–32. https://doi.org/10.12775/tmna.2022.006

2. Benedetti, K. C. B., Gonçalves, P. B., Lenci, S., & others. (2023). Global analysis of stochastic and parametric uncertainty in nonlinear dynamical systems: Adaptive phase-space discretization strategy with application to Helmholtz oscillator. *Nonlinear Dynamics, 111*, 15675–15703. https://doi.org/10.1007/s11071-023-08667-5

3. Lee, M. (2023). Local topological stability for diffeomorphisms. *Qualitative Theory of Dynamical Systems, 22*, Article 51. https://doi.org/10.1007/s12346-023-00755-6

4. Strässer, R., Schaller, M., Worthmann, K., Berberich, J., & Allgöwer, F. (2024). Koopman-based feedback design with stability guarantees. *IEEE Transactions on Automatic Control, 70*(1), 355–370. https://doi.org/10.1109/TAC.2024.3425770

5. Millán, A. P., Sun, H., Torres, J. J., & Bianconi, G. (2024). Triadic percolation induces dynamical topological patterns in higher-order networks. *PNAS Nexus, 3*(7), pgae 270. https://doi.org/10.1093/pnasnexus/pgae270

6. Foidl, H., Golendukhina, V., Ramler, R., & Felderer, M. (2023). Data pipeline quality: Influencing factors, root causes of data-related issues, and processing problem areas for developers. *Journal of Systems and Software, 207*, 111855. https://doi.org/10.1016/j.jss.2023.111855

7. Pradhan, C., & Trehan, A. (2024). Data engineering for scalable machine learning: Designing robust pipelines. *International Journal of Computer Engineering and Technology, 15*(6), 1840–1852. https://doi.org/10.34218/IJCET_15_06_157

8. Chapman, A., Lauro, L., Missier, P., & Torlone, R. (2023). Supporting better insights of data science pipelines with fine-grained provenance. *ACM Transactions on Database Systems, 49*(2), Article 6, 1–42. https://doi.org/10.1145/364438

9. Symonov, D., & Symonov, Y. (2024). Integration of knowledge management processes into a dynamic organizational environment. *Artificial Intelligence, 29*(2), 98–106. https://doi.org/10.15407/jai2024.02.098

10. Symonov, D. (2025). Maximization of entropy method for predicting the behavior of complex systems under noise conditions. *Journal of Numerical and Applied Mathematics, 2*, 52–61. https://doi.org/10.17721/2706-9699.2024.2.03

11. Lei, N., & Zhou, S. (2022). Upper semicontinuity of uniform attractors for non-autonomous lattice systems under singular perturbations. *Scientia Sinica Mathematica, 52*, 1121–1136. https://doi.org/10.1360/SCM-2021-0372

12. Symonov, D. I., & Symonov, Y. D. (2024). Methods for selecting models of functioning of multicomponent information and environmental systems. *Mathematical Modeling, 1*(50), 57–63. https://doi.org/10.31319/2519-8106.1(50)2024.304943

Дата надходження статті: 28.10.2025
Дата прийняття статті: 17.11.2025
Опубліковано: 30.12.2025