

**Мотайло А. П.**, кандидат технічних наук, доцент,  
доцент кафедри природничо-наукової підготовки  
Херсонської державної морської академії  
ORCID: 0000-0002-6775-5788

## ПОБУДОВА БАЗИСУ БІПІРАМІДИ З ТРЬОМА РУХОМИМИ ВУЗЛАМИ

*У статті розглянуто можливості апроксимації методом скінченних елементів функції трьох змінних в області, яка має форму чотирикутної біпіраміди. Основною задачею даного дослідження є покращення апроксимаційних властивостей решіток тетрадрально-октадральної структури шляхом поповнення їх комірками, які не є правильними багатогранниками. Зокрема, автором вивчаються скінченні елементи, які утворені в результаті лінійних деформацій октаедра.*

*У даній роботі об'єктом досліджень є скінченний елемент у формі біпіраміди з трьома рухомими вузлами, які можна переміщати вздовж півосей багатогранника. Дана властивість дозволяє пристосувати скінченний елемент, який не є правильним багатогранником, до границі розрахункової області краще за правильний багатогранник.*

*У роботі побудовано два скінченно-елементні базиси біпіраміди з сімома та шістьма вузлами інтерполяції. Для побудови базисних функцій біпіраміди застосовано два методи: геометричний та метод конденсації. Отримані базиси є поліноміальними функціями, які параметрично залежать від значень трьох коефіцієнтів видовження/стиснення півосей біпіраміди. Базис з шістьма вузлами інтерполяції містить додатковий параметр у вигляді вагового коефіцієнта, який є наслідком застосування процедури конденсації до функцій семивузлового базису біпіраміди. Наявність параметрів дозволяє покращувати інтерполяційні властивості побудованих базисів біпіраміди відповідно до критеріїв якості апроксимації, які використовують в методі скінченних елементів. В даній роботі таким критерієм вважається величина сліду матриці жорсткості. Згідно з обраним критерієм знайдено значення коефіцієнтів лінійної деформації трьох півосей октаедра, при яких слід матриці жорсткості біпіраміди є мінімальним.*

*У статті отримано інтервальні оцінки для коефіцієнтів видовження/стиснення трьох півосей октаедра, які характеризують відхилення геометричних розмірів біпіраміди від правильного багатогранника та приводять до втрати всіх видів симетрії. Для визначення меж допустимих значень коефіцієнтів лінійних деформацій октаедра розраховано показник асиметрії Skewness, який використовують в системі скінченно-елементного аналізу ANSYS. Отримані інтервальні оцінки для коефіцієнтів видовження/стиснення півосей октаедра відповідають критерію мінімальності сліду матриці жорсткості біпіраміди з трьома рухомими вузлами, що вказує на позитивний прогноз використання даного скінченного елемента як комірки решітки тетрадрально-октадральної структури.*

*Перспективою подальших досліджень є побудова кубатурних формул на скінченному елементі в формі біпіраміди з трьома рухомими вузлами з метою використання його при алгоритмізації методу скінченних елементів.*

*Ключові слова: скінченний елемент, біпіраміда, вузли інтерполяції, метод конденсації, базис, базисні функції, матриця жорсткості.*

### **Motailo A. P. Constructing of bipyramid basis with three movable nodes**

*The article discusses the possibilities of approximation by the finite element method of the function of three variables in the region that has the shape of a quadrangular bipyramid. The main task of this study is to improve the approximation properties of lattices of the tetrahedral-octahedral structure by replenishing them with cells that are not regular polyhedra. In particular, the author studies finite elements, which are formed as a result of linear deformations of the octahedron.*

*In this work, the object of research is a finite element in the form of a bipyramid with three movable nodes that can be moved along the semi-axes of the polyhedron. This property makes it possible to adjust a finite element that is not a regular polyhedron to the boundary of the computational domain better than a regular polyhedron.*

*Two finite-element bases of a bipyramid with seven and six interpolation nodes are constructed in the paper. Two methods are used to construct the basic functions of the bipyramid: the geometric method and the condensation method. The obtained bases are polynomial functions that parametrically depend on the values of the three elongation/compression coefficients of the semi-axes of the bipyramid. The basis with six interpolation nodes contains an additional parameter that is a weight coefficient, which is a consequence of the application of the condensation procedure to the functions of the seven-node basis of the bipyramid. The availability of parameters allows improving the interpolation properties of the constructed bipyramid bases in accordance with the approximation quality criteria used in the finite element method. In this work, such a criterion is considered to be the value of the trace of the stiffness matrix. According to the selected criterion, the values of the linear deformation coefficients of the three semi-axes of the octahedron are found, at which the trace of the bipyramid stiffness matrix is minimal.*

*In the article we have obtained interval estimates for the elongation/compression coefficients of the three semi-axes of the octahedron, which characterize the deviation of the geometric dimensions of the bipyramid from the regular polyhedron and lead to the loss of all types of symmetry. To determine the limits of the permissible values of the coefficients of linear deformations of*

the octahedron, the Skewness asymmetry index used in the ANSYS finite element analysis system was calculated. The obtained interval estimates for the elongation/compression coefficients of the octahedron semi-axes correspond to the criterion of minimality of the trace of the stiffness matrix of a bipyramid with three moving nodes, which indicates a positive prediction of the use of this finite element as a lattice cell of the tetrahedral-octahedral structure.

Prospect for further research is the construction of cubature formulas on a finite element in the form of a bipyramid with three moving nodes in order to use it in the algorithmization of the finite element method.

Key words: finite element, octahedron, bipyramid, interpolation nodes, condensation method, basis, basis functions, condensation method, stiffness matrix.

**Постановка проблеми.** Як відомо при розв'язанні граничних задач математичної фізики методом скінченних елементів (МСЕ) для об'ємних областей обчислювальна складність алгоритму є достатньо високою. Найчастіше це пов'язано з уточненням дискретної моделі розрахункової області в місцях дії зовнішніх та внутрішніх сил, навантажень, джерел тепла тощо. Відповідно збільшуються часова складність алгоритму та об'єм пам'яті, необхідні для реалізації МСЕ. У випадках, коли задача не може бути розв'язана за прийнятний час, одним із способів зменшення складності обчислень є застосування альтернативних решіток для побудови дискретної моделі. На практиці відомо про використання в 3D решіток тетраедрадрально-октаедрадральної структури, які дозволяють скоротити час скінченно-елементних розрахунків порівняно з решітками тетраедрадральної структури. При цьому октаедр не міститься в бібліотеках систем скінченно-елементного аналізу (ANSYS, NASTRAN, ЛІРА та ін.). Тому існує задача дослідження скінченних елементів (СЕ) в формі октаедра та чотирикутної біпіраміди, яка краще за правильний багатогранник може бути пристосована до границь розрахункової області.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** У роботах [1, 2] побудовано скінченно-елементні базиси октаедра з сімома вузлами інтерполяції. Авторами [1] застосовано решітки, які містять октаедри, при розв'язанні граничних задач для розрахунку медичних характеристик. У вказаній роботі експериментально доведено, що застосування октаедрів зменшує часову складність алгоритму МСЕ порівняно з результатами, які отримано при триангуляції області задачі. У роботі [2] рівняння 3D-ідеального потоку нестисливої рідини дискретизовано МСЕ. Збіжність чисельного розв'язку до точного в даній задачі перевірено в області, яка має форму гексаедра з вписаним у нього октаедром. У роботі [3] побудовано базиси октаедра з шістьма вузлами інтерполяції та доведено збіжність МСЕ при розв'язанні граничних задач для рівнянь еліптичного типу за умови дискретизації розрахункової області решіткою тетраедрадрально-октаедрадральної структури.

У роботах [4, 5] біпіраміда розглядається як СЕ, який отримано шляхом лінійних деформацій неоднієї та двох півосей октаедра. Подібні деформації СЕ правильної геометричної форми виникають при дискретизації розрахункової області, коли деякі вузли доводиться виносити на границю. У даних роботах побудовано параметричні базиси біпіраміди з одним та двома рухомими вузлами, а також визначено умови їх використання при розв'язанні граничних задач МСЕ. При цьому питання винесення на границю трьох вузлів октаедра залишається не дослідженим. Отже, актуальною є задача вивчення можливостей інтерполяції на СЕ в формі біпіраміди, яка утворена в результаті трьох лінійних деформацій півосей октаедра.

**Метою даної статті** є побудова базисів біпіраміди з трьома рухомими вузлами, дослідження їх геометричних та апроксимаційних властивостей, а також визначення умов їх використання при розв'язанні граничних задач МСЕ.

**Виклад основного матеріалу.** Розглядається чотирикутна біпіраміда, яка має сім вузлів інтерполяції, розташовані в її вершинах та точці перетину діагоналей (рис. 1). Вважається, що точки  $K_3, K_4, K_6$  віддалені від центру багатогранника  $K_0$  на відстань  $a$  ( $a \in R$ ), а відрізки  $K_0K_1, K_0K_2$  та  $K_0K_5$  мають пропорційні величині  $a$  довжини:

$$K_0K_1 = r \cdot a = t, K_0K_2 = p \cdot a = b, K_0K_5 = q \cdot a = c, \quad (1)$$

де  $r, p, q > 0$  та  $r, p, q \in R$ .

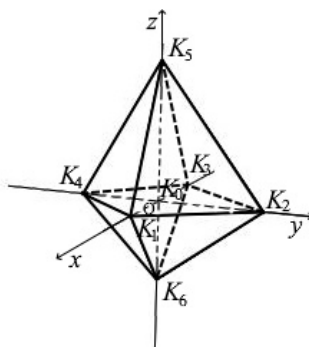


Рис. 1. Чотирикутна біпіраміда як скінченний елемент

Джерело: побудовано в середовищі комп'ютерної математики Maple для коефіцієнтів  $r=0,9; p=0,7; q=1,2$

Базисні функції біпіраміди, які відповідають її вершинам, легко отримати, застосовуючи геометричні методи побудови [7]:

$$\begin{aligned} NS_1 &= \frac{1}{t(a+t)} x(x+a); & NS_3 &= \frac{1}{a(a+t)} x(x-t); \\ NS_2 &= \frac{1}{b(a+b)} y(y+a); & NS_4 &= \frac{1}{a(a+b)} y(y-b); \\ NS_5 &= \frac{1}{c(a+c)} z(z+a); & NS_6 &= \frac{1}{a(a+c)} z(z-c). \end{aligned} \quad (2)$$

Базисну функцію, яку асоційовано з центральним вузлом, можна знайти з рівності:

$$NS_0 = 1 - \sum_{i=1}^6 NS_i, \text{ де } i = \overline{1;6}. \quad (3)$$

Тоді за формулами (1), (2) можна бачити, що функція (3) є явно залежною від координат  $(x, y, z)$  та параметрів  $a, r, p, q$ :

$$NS_0 = 1 - \frac{1}{pqra^2} (pq(x^2 + a(1-r)x) + rq(y^2 + a(1-p)y) + rp(z^2 + a(1-q)z)). \quad (4)$$

Тотожними перетвореннями функцію (4) можна звести до вигляду:

$$NS_0 = \left( 1 + \frac{(1-r)^2}{4r} + \frac{(1-p)^2}{4p} + \frac{(1-q)^2}{4q} \right) \cdot F, \quad (5)$$

$$\text{де } F = 1 - \frac{\left(x + \frac{1}{2}a(1-r)\right)^2}{\frac{a^2G}{4pq}} - \frac{\left(y + \frac{1}{2}a(1-p)\right)^2}{\frac{a^2G}{4qr}} - \frac{\left(z + \frac{1}{2}a(1-q)\right)^2}{\frac{a^2G}{4pr}},$$

$$G = pq(r^2 + 1) + (qp^2 + (1-q)^2 p + q)r.$$

Представлення функції  $NS_0$  у вигляді (5) дозволяє геометрично її інтерпретувати. Дійсно, поверхнями рівня базисної функції  $NS_0 = NS_0(x, y, z, a, r, p, q)$  в цьому випадку є еліпсоїди зі зміщеними в точку  $\left(\frac{a(r-1)}{2}, \frac{a(p-1)}{2}, \frac{a(q-1)}{2}\right)$  центрами, якщо початок системи координат пов'язувати з вузлом  $K_0$  (рис. 2).

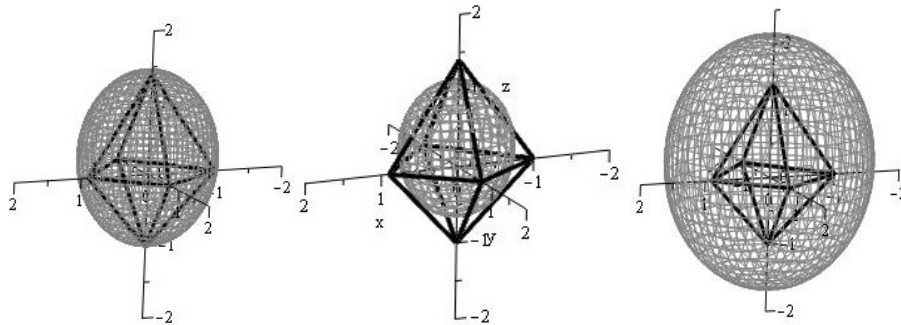


Рис. 2. Поверхні рівня центральної функції  $NS_0(x, y, z, a, r, p, q) = C$

Джерело: побудовано в середовищі комп'ютерної математики Maple для  $a=1, p=0,7, q=1,2, r=0,9; C=0, C=0,7, C=1,2$

Поверхні рівня базисних функцій  $\{NS_i\}_{i=1}^6$  є парами паралельних площин, що проходять через основу, яка не містить однойменного вузла  $i$ , та протилежну вершину біпіраміди.

Для побудови базису чотирикутної біпіраміди з шістьма вузлами інтерполяції достатньо застосувати процедуру конденсації [7], розподіляючи внесок центральної функції з ваговими коефіцієнтами по тих вузлах, які знаходяться в вершинах багатогранника, тобто:

$$\begin{aligned} NC_1 &= NS_1 + \alpha_1 \cdot NS_0, & NC_3 &= NS_3 + \alpha_2 \cdot NS_0, \\ NC_2 &= NS_2 + \beta_1 \cdot NS_0, & NC_4 &= NS_2 + \beta_2 \cdot NS_0, \\ NC_5 &= NS_5 + \gamma_1 \cdot NS_0, & NC_6 &= NS_6 + \gamma_2 \cdot NS_0, \end{aligned} \quad (6)$$

де  $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1; 0 \leq \alpha_1 \leq 1$ .

Для дослідження апроксимаційних властивостей скінченно-елементного базису (6) необхідно зменшити кількість невідомих вагових коефіцієнтів. Задовольняючи умови повноти базису [7]:

$$\sum_{i=1}^6 x_i NC_i = x, \sum_{i=1}^6 y_i NC_i = y, \sum_{i=1}^6 z_i NC_i = z, \sum_{i=1}^6 NC_i = 1, -$$

та враховуючи їх лінійну залежність, можна отримати такі співвідношення вагових коефіцієнтів:

$$\alpha_2 = r\alpha_1; \beta_1 = \frac{1 - \alpha_1(r+1)}{p+1}; \beta_2 = p\beta_1; \gamma_1 = \frac{1 - \alpha_1(r+1)}{q+1}; \gamma_2 = q\gamma_1. \quad (7)$$

Згідно з умовами (6), ваговий коефіцієнт  $\alpha_1$  змінюється в межах від нуля до одиниці. Звідси легко отримати інтервальні оцінки для інших вагових коефіцієнтів:

$$0 \leq \alpha_2 \leq r; 0 \leq \beta_1 \leq \frac{1}{p+1}; 0 \leq \beta_2 \leq \frac{p}{p+1}; 0 \leq \gamma_1 \leq \frac{1}{q+1}; 0 \leq \gamma_2 \leq \frac{q}{q+1}.$$

Отже, базисні функції біпіраміди з шістьма вузлами інтерполяції визначаються формулами (6), (7).

Побудовані функції  $\{NC_i\}_{i=1}^6$  є функціями координат  $(x, y, z)$  з параметрами  $r, p, q, \alpha_1$ . Для вивчення інтерполяційних властивостей отриманого базису в залежності від значень коефіцієнтів видовження/стиснення півосей багатогранника необхідно обрати критерій якості апроксимації. На думку автора [6], такою характеристикою може бути мінімальний слід матриці жорсткості SE. Обравши дану характеристику за основу визначення найкращого серед базисів біпіраміди, треба знайти відповідні значення параметрів  $r, p, q$ , при яких слід матриці жорсткості біпіраміди з базисними функціями (6), (7) буде мінімальним.

За формулою:

$$Trace = \sum_{i=1}^6 \iiint_V \left( \left( \frac{\partial NC_i}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial NC_i}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial NC_i}{\partial z} \right)^2 \right) dV,$$

де  $V$  – об'єм біпіраміди, – слід матриці жорсткості біпіраміди є функцією, яку можна представити функцією однієї змінної  $\alpha_1$  з параметрами  $r, p, q$ :

$$Trace = \frac{a}{30r^2 p^2 q^2 (1+r)(1+p)(1+q)} (A\alpha_1^2 + B\alpha_1 + C), \quad (8)$$

де

$$A = \sum_{|\alpha| \leq 12} a_{ijk} r^i p^j q^k, B = \sum_{|\alpha| \leq 12} b_{ijk} r^i p^j q^k, C = \sum_{|\alpha| \leq 12} c_{ijk} r^i p^j q^k \quad (9)$$

$$(\alpha = (i, j, k) - \text{мультиіндекс, } i, j, k = 0..4, |\alpha| = i + j + k)$$

– поліноміальні функції трьох змінних  $r, p, q$  зі сталими коефіцієнтами  $a_{ijk}, b_{ijk}, c_{ijk}$ , які через громіздкість запису в даній роботі не наводяться.

Скориставшись необхідною умовою існування екстремуму функції однієї змінної ( $d(Trace)/d\alpha_1 = 0$ ), легко знайти критичну точку  $\alpha_1 = -B/(2A)$ , яка є точкою мінімуму функції  $Trace = Trace(\alpha_1)$ , коли  $A > 0$ . При цьому  $\alpha_1 = \alpha_1(r, p, q)$ . Підстановкою даного виразу для  $\alpha_1$  у рівність (8) можна отримати функцію сліду матриці жорсткості як функцію трьох змінних параметрів  $Trace = Tr(r, p, q)$ . Для дослідження на екстремум необхідно знайти критичні точки даної функції (рис. 3), які є розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} \partial Tr / \partial r = 0; \\ \partial Tr / \partial p = 0; \\ \partial Tr / \partial q = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Виявляється, що умові  $r, p, q > 0$  задовольняють лише два розв'язки системи:

$$r_1 \approx 0,64917; p_1 \approx 0,70588; q_1 \approx 0,70593;$$

$$r_2 \approx 0,16991; p_2 \approx 0,77288; q_2 \approx 0,77375.$$

Перевірка знаків головних мінорів матриці частинних похідних другого порядку функції  $Trace = Tr(r, p, q)$  вказує на те, що точка  $(r_1, p_1, q_1)$  є точкою мінімуму. Отже, слід матриці жорсткості біпіраміди є мінімальним в цій точці та становить приблизно 2,358.

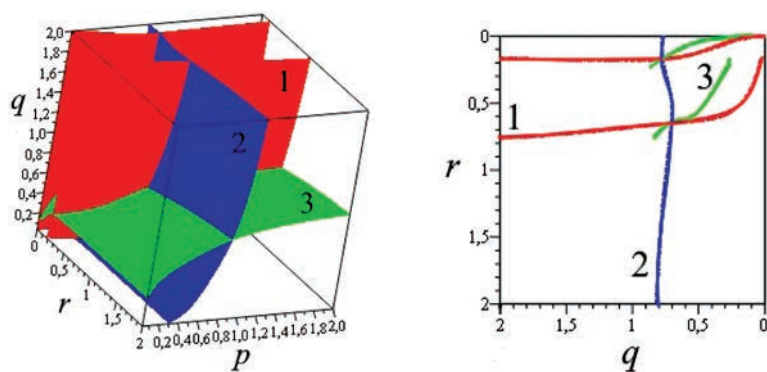


Рис. 3. Графічне представлення розв'язків системи (9) у просторі  $Orpq$  та проєкції на площину  $Orq$ :  
 1 – поверхня  $\partial Tr/\partial r = 0$ ; 2 – поверхня  $\partial Tr/\partial p = 0$ ; 3 – поверхня  $\partial Tr/\partial q = 0$

Джерело: побудовано в системі комп'ютерної математики Maple за формулами (8), (9) для  $a=1$ ;  $r=0,9$ ;  $p=0,7$ ;  $q=1,2$

Подальший аналіз отриманих функцій базису біпіраміди, яка має три рухомі вузли, розташовані в вершинах  $K_1, K_2, K_5$ , пов'язаний з тим, що даний СЕ не є правильним багатогранником. Дійсно, в даній роботі біпіраміду слід розглядати як поліедр, який отримано в результаті лінійних деформацій трьох півосей октаедра. Тоді необхідно визначити умови використання біпіраміди при алгоритмізації МСЕ. Застосовуючи методи, які рекомендовано системою скінченно-елементного аналізу ANSYS, для СЕ, який не є правильним багатогранником, треба обчислити показник асиметрії Skewness [8, 9]. Його значення є мірою асиметрії, яка розраховується як коефіцієнт пропорційності відносно об'єму СЕ, який є правильним багатогранником. При цьому відхилення в межах  $\pm 0,1$  та  $\pm 0,25$  від об'єму правильного геометричного тіла вважаються допустимими, відповідно, при високих та невисоких вимогах до точності отримуваних розв'язків.

Таким чином, на практиці припустимими є такі значення коефіцієнтів видовження/стиснення  $r, p, q$  півосей біпіраміди, які задовольняють умові  $3,6 \leq rpq + r(p+1) + p(q+1) + q(r+1) \leq 4,4$  при високих вимогах до точності отримуваних розв'язків і  $3 \leq rpq + r(p+1) + p(q+1) + q(r+1) \leq 5$  – при невисоких вимогах до точності отримуваних розв'язків. При цьому критичні значення коефіцієнтів  $r, p, q$ , при яких слід матриці жорсткості біпіраміди є мінімальним, задовольняють нерівність, яка відповідає високим вимогам до точності при розв'язанні задач МСЕ.

#### Висновки з дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі

1. У роботі побудовано два базиси біпіраміди з трьома рухомими вузлами, які можуть бути застосовані при дискретизації диференціальних рівнянь МСЕ для тривимірних областей. Побудовані функції допускають геометричну інтерпретацію та містять невизначені параметри, які дозволяють покращувати інтерполяційні властивості даного СЕ відповідно до обраного критерію якості апроксимації.

2. Досліджено геометричні властивості функцій семивузлового базису біпіраміди, які є рівняннями параболічного та еліптичного типів при будь-яких допустимих значеннях коефіцієнтів видовження/стиснення трьох півосей біпіраміди. Поверхні рівня функцій, які асоційовано з вершинами біпіраміди та її центром, є, відповідно, виродженими параболічними циліндрами та еліпсоїдами.

3. Досліджено апроксимаційні властивості побудованого базису біпіраміди з шістьма вузлами інтерполяції, функції якого залежать від значень коефіцієнтів видовження/стиснення трьох півосей біпіраміди. Згідно з критерієм визначення найкращого базису біпіраміди знайдено критичні значення коефіцієнтів видовження/стиснення трьох півосей біпіраміди, при яких слід матриці жорсткості на даному СЕ є мінімальним.

4. Знайдено інтервальні оцінки для коефіцієнтів видовження/стиснення трьох півосей біпіраміди з шістьма вузлами інтерполяції. Межі допустимих значень вказаних коефіцієнтів розраховано відповідно до вимог, які висувають до асиметричних СЕ в системі скінченно-елементного аналізу ANSYS.

5. Перспективою подальших досліджень є побудова кубатурних формул на СЕ в формі чотирикутної біпіраміди з метою включення його до бібліотеки МСЕ.

#### Список використаних джерел:

1. Greiner, G., Grosso, R. Hierarchical Tetrahedral-Octahedral Subdivision for Volume Visualization. *The Visual Computer*. 2000. Vol. 16. P. 357–369. URL: <https://doi.org/10.1007/PL00007214> (date of access: 25.04.2024).
2. de Bruijn, H. Numerical Method for 3D Ideal Flow. URL: <https://hdebruijn.soo.dto.tudelft.nl/jaar2010/octaeder.pdf> (date of access: 25.04.2024).
3. Мотайло А.П. Геометричне моделювання скалярних та векторних полів на решітках тетраедраально-октаедральної структури: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. Дніпро, 2019. 24 с.

---

4. Мотайло А. П., Хомченко А. Н., Тулученко Г. Я. Побудова базису біпіраміди. *Радіоелектроніка, інформатика, управління*. 2016. №4 (39), С. 29–36. DOI: 10.15588/1607-3274-2016-4-4 (дата звернення: 25.04.2024).

5. Мотайло А.П. Побудова базису біпіраміди з двома рухомими вузлами. *Системи та технології*. Т. 65, №1. Дніпро, 2023. С.7–12 DOI: 10.32782/2521-6643-2023.1-65.1 (дата звернення: 25.04.2024).

6. Sekulović, M. *Metod konačnih elemenata*. Beograd: Gradevinska knjiga, 1984. 592 p.

7. Zienciewicz, O. C. *Introductory Lectures on the Finite Elements Method*. Wien: Springer-Verlag, 2014. 99 p.

8. ANSYS FLUENT 12.0 User's Guide - 6.2.2 Mesh Quality. URL: <https://www.afs.enea.it/project/neptunius/docs/fluent/html/ug/node167.htm> (date of access: 25.04.2024).

9. Skewness in ANSYS Meshing – Illustrated Explanation. URL: <https://mechanicalland.com/skewness-of-mesh-structures-in-ansys-meshing/#gsc.tab=0> (date of access: 25.04.2024).

#### References:

1. Greiner, G. & Grosso, R. (2000). Hierarchical Tetrahedral-Octahedral Subdivision for Volume Visualization. *The Visual Computer*, (16), 357–369. <https://doi.org/10.1007/PL00007214>

2. de Bruijn, H. (2010). Numerical Method for 3D Ideal Flow. Retrieved from: <https://hdebruijn.soo.dtu.tudelft.nl/jaar2010/octaeder.pdf>

3. Motailo, A. P. (2019). *Heometrychne modeliuвання skaliarnykh ta vektornykh poliv na reshitkakh tetraedralno-oktaedralnoi struktury* [Geometric modeling of scalar and vector fields on the lattices of tetrahedral-octahedral structure] (avtoref. dys. ... kandydata tekhn. nauk). Dniprovskiy natsionalnyi universytet imeni Olesia Honchara. Dnipro, Ukraina.

4. Motailo, A. P., Khomchenko, A. N. & Tuluchenko, H. Ya. (2016). Pobudova bazysu bipiramidy [The constructing of bipyramid's basis]. *Radioelektronika, informatyka, upravlinnia*. (4(39)), 29–36. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2016-4-4>

5. Motailo, A. P. (2023). Pobudova bazysu bipiramidy z dvoma rukhomymy vuzlamy. [Construction of bipyramid basis with two movable nodes] *Systemy ta tekhnolohiyi*. (65(1)), 7–12. <https://doi.org/10.32782/2521-6643-2023.1-65.1>

6. Sekulović, M. (1984). *Metod konačnih elemenata* [The Finite Element Method]. Beograd: Gradevinska knjiga.

7. Zienciewicz, O. C. (2014). *Introductory Lectures on the Finite Element Method*. Wien: Springer-Verlag.

8. ANSYS FLUENT 12.0 User's Guide - 6.2.2 Mesh Quality. Retrieved from <https://www.afs.enea.it/project/neptunius/docs/fluent/html/ug/node167.htm>

9. *Skewness in ANSYS Meshing – Illustrated Explanation*. Retrieved from <https://mechanicalland.com/skewness-of-mesh-structures-in-ansys-meshing/#gsc.tab=0>